Теория множеств

Сигнатура теории множеств состоит из единственного предикатного символа $\in$.

Система аксиом ZFC (Zermelo–Fraenkel–choice)

- *Аксиома существования*: множества существуют.

  $\exists x(x = x)$

- *Аксиома объёмности*: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

  $\forall X \forall Y(\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$

- *Схема аксиом выделения*: любому множеству X и любому свойству φ отвечает множество Y, состоящее в точности из тех элементов множества X, которые обладают свойством φ.

  Если φ — формула, свободные переменные которой содержатся среди $X, z, u_1, \ldots, u_n$, то $\forall X \forall u_1, \ldots, u_n \exists Y \forall z(z \in Y \leftrightarrow z \in X \wedge \varphi)$

  Множество всех $y \in X$, обладающих свойством φ, обозначается

  $$\{y \in X : \varphi(y)\}.$$

  По техническим причинам бывает удобно рассматривать совокупность всех множеств x, для которых выполнено данное свойство-формула $\varphi(x)$. Такая совокупность называется *классом*. Запись:

  $$x \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow \varphi(x) \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}.$$

  Классы $\boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}$ и $\boldsymbol{D} = \{x : \psi(x)\}$ *равны*, если $\forall x(\varphi(x) = \psi(x))$. Класс, который не равен никакому множеству, называется *собственным*. *Универсальный класс* $\boldsymbol{V}$ — это класс всех множеств: $\boldsymbol{V} = \{x : x = x\}$.

  Используя аксиому объёмности и схему аксиом выделения, можно определить

  - *пересечение* $X \cap Y = \{z \in X : z \in Y\}$,
  - *разность* $X \setminus Y = \{z \in X : z \notin Y\}$,
  - *пустое множество* $\varnothing = \{y \in X : y \neq y\}$.

- *Аксиома пары*: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (*неупорядоченная пара* элементов x и y).

  $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

  Используя аксиому объёмности и аксиому пары, можно определить

  - неупорядоченную пару $\{x, y\}$,
  - одноэлементное множество $\{x\} = \{x, x\}$,
  - упорядоченную пару $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
  - упорядоченную тройку $(x, y, z) = ((x, y), z)$,
  - $\ldots$

- *Аксиома объединения*: для любого семейства множеств $\mathscr{F}$ существует множество $X = \bigcup \mathscr{F}$ — объединение семейства $\mathscr{F}$; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства $\mathscr{F}$.

  $\forall \mathscr{F} \exists X \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \to x \in X)$.

  Обозначения: $X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}$, $X \cup Y \cup Z = \bigcup\{X, Y, Z\}$ и т.д.

- *Схема аксиом подстановки* (*замещения*): если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества X определено множество Y, элементами которого являются те и только те множества y, для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

  $\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to$

  $\quad \to \forall X \exists Y (\forall x \in X) \forall y(\varphi(x, y) \to y \in Y)$

  Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b, для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда Y — не что иное как образ множества X при этом «отображении».

- *Аксиома бесконечности*: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

  $\exists X((\varnothing \in X) \wedge \forall x(x \in X \to (x \cup \{x\}) \in X))$

  Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует, что существует множество, состоящее из элементов $\varnothing$ (обозначение: 0), $\{\varnothing\}$ (обозначение: 1), $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (обозначение: 2), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (обозначение: 3), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ (обозначение: 4), $\ldots$.

  Назовём множество Y *подмножеством* множества X (обозначение: $Y \subset X$), если $\forall y(y \in Y \to y \in X)$. Если $Y \subset X$ и $\neg(Y = X)$, то Y называется *собственным подмножеством* (обозначение: $Y \subsetneq X$).

- *Аксиома множества подмножеств*: для любого множества X существует множество Y, состоящее из всех подмножеств множества X.

  $\forall X \exists Y \forall z(z \subset X \to z \in Y)$

  Для множества подмножеств множества X используются обозначения $\mathscr{P}(X)$, 2^X и $\exp X$.

  Аксиома множества подмножеств позволяет определить

  декартово произведение $X \times Y$ двух (и любого конечного числа) множеств X и Y, а также понятия отношений и отображений:

  $$X \times Y = \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y) : (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y))\}.$$

  Множество R называется (бинарным) *отношением*, если $R \subset X \times Y$ для некоторых множеств X и Y. *Область определения* и *область значений* отношения R — это множества

  $$\operatorname{dom} R = \{x \in X : \exists y((x, y) \in R)\} \quad \text{и} \quad \operatorname{ran} R = \{y \in Y : \exists x((x, y) \in R)\}.$$

  Отношение f называется *отображением* (или *функцией*), если

  $$\forall x \forall y \forall x(((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \to y = z).$$

  В случае, когда $\operatorname{dom} f = X$, используют обозначение $f \colon X \to Y$.

  Множества можно возводить в степень:

  $$Y^X = \{f \subset X \times Y : f \text{ — функция, } \operatorname{dom} f = X, \operatorname{ran} f \subset Y\}.$$

- *Аксиома регулярности* (*фундирования*): каждое непустое множество X содержит элемент x такой, что $X \cap x = \varnothing$.

  $\forall X(\neg(X = \varnothing) \to (\exists x \in X)(x \cap X = \varnothing)$

Следствие. *Не существует бесконечной последовательности множеств* $x_0, x_1, x_2, \dots$ *такой, что* $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ (*в частности,* $\nexists X (X \in X)$) — достаточно рассмотреть $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ и применить аксиому. Из аксиомы выбора следует, что верно и обратное: из несуществования бесконечной последовательности $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ вытекает аксиома регулярности — иначе $(\exists X \neq \varnothing)(\forall x \in X)(x \cap X \neq \varnothing)$ и по аксиоме выбора существует множество $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, в котором $x_0 \in X$, $x_1 \in X \cap x_0$, $x_2 \in X \cap x_1$ и т.д.

- *Аксиома выбора* (AC): для каждого семейства $\mathscr{F}$ непустых множеств существует *функция выбора* на $\mathscr{F}$, т.е. отображение $f\colon \mathscr{F} \to \bigcap \mathscr{F}$ с тем свойством, что $f(X) \in X$ для каждого $X \in \mathscr{F}$.

$\forall \mathscr{F} ((\forall X \in \mathscr{F})(X \neq \varnothing) \to (\exists f\colon \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F})(\forall X \in \mathscr{F})(f(X) \in X))$

Ординалы и кардиналы

Порядок

Частичный порядок, или просто *порядок*, на множестве X — это подмножество $\leq$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leq y$ вместо $(x, y) \in \leq$; кроме того, мы иногда пишем $y \geq x$ вместо $x \leq y$):

- $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \to (x \leq z)$ (*транзитивность*);
- $\forall x \in X (x \leq x)$ (*рефлексивность*);
- $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \to (x = y)$ (*антисимметричность*).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leq)$) называется (*частично*) *упорядоченным множеством*; про множество X говорят, что оно (*частично*) *упорядочено отношением* $\leq$. Запись $x \leq y$ читается «элемент x не больше элемента y» или «элемент x не превосходит элемента y», а запись $x \geq y$ — «элемент x не меньше элемента y».

Для каждого порядка $\leq$ на X однозначно определено соответствующее отношение $<$ *строгого порядка*: $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x *меньше* элемента y, а y *больше* x. И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leq$, которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X, упорядоченного отношением $\leq$, *сравнимы*, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Элементы x и y *совместимы*, если существует $z \in X$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$.

Говорят, что $y \in X$ лежит *между* $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leq y \leq z$.

Элемент x множества $Y \subset X$ называется *минимальным* (*максимальным*) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leq x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leq y) \to (y = x))$).

Элемент x *ограничивает* множество $Y \subset X$ *сверху* (*снизу*), или является *верхней* (*нижней*) *гранью* множества Y, если $\forall y \in Y(y \leq x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leq y)$). Если при этом x принадлежит множеству Y, то он называется *наименьшим* (*наибольшим*) элементом Y и обозначается $\min Y$ ($\max Y$).

Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*, *ограниченным*).

Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y, если она существует, называется также *точной верхней* (*нижней*) *гранью*, или *супремумом* (*инфимумом*), множества Y и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Интервалом упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I. Интервалы бывают восьми типов:

$$
\begin{array}{rlrl}
\text{а)} & \{x : x < a\}, & \text{д)} & \{x : a \leq x \leq b\} = [a, b], \\
\text{б)} & \{x : x \leq a\}, & \text{е)} & \{x : a < x < b\} = (a, b), \\
\text{в)} & \{x : a < x\}, & \text{ё)} & \{x : a \leq x < b\} = [a, b), \\
\text{г)} & \{x : a \leq x\}, & \text{ж)} & \{x : a < x \leq b\} = (a, b],
\end{array}
$$

где $a, b \in I$. Интервалы типа а) называют *начальными интервалами*.

Порядок $\leq$ на X называется *линейным*, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leq)$ называется *линейно упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго линейно упорядоченным множеством*.

Порядок $\leq$ на X *полон*, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leq)$, где $\leq$ — полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго вполне упорядоченным множеством*. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

Порядок $\leq$ на X называется *фундированием*, если любое непустое множество $Y \subset X$ содержит минимальный (в Y) элемент.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leq)$ естественно возникает *индуцированный* порядок, или *сужение* порядка $\leq$ на Y — это пересечение порядка $\leq$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leq$ на X. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f\colon X \to Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ называется *порядковым изоморфизмом*, а сами эти упорядоченные множества — *порядково изоморфными*, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leq y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preccurlyeq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая сохраняющая порядок (т.е. «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

Теорема об изоморфизме

Теорема 1. Пусть $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что начальный интервал $\{x \in X : x < x_*\}$ множества X порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству Y, либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество X порядково изоморфно начальному интервалу $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ множества Y, либо сами множества $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ порядково изоморфны.

Замечание 1.

1. Пусть $f\colon P \to P$ — сохраняющее порядок биективное отображение вполне упорядоченного множества P в себя. Тогда $f(x) \geq x$ для каждого $x \in P$.
2. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу.

Ординалы

Определение 1. Множество S *транзитивно*, если оно содержит все элементы всех своих элементов: $\forall x (x \in S \to x \subset S)$.

Определение 2. Множество называется *ординалом* (*порядковым числом*), если оно транзитивно и строго вполне упорядочено отношением $\in$.

Ординалы обычно обозначают буквами α, β, γ, $\dots$. Вместо $\alpha \in \beta$ часто пишут $\alpha < \beta$. Запись $\alpha \leq \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$.

Класс всех ординалов обозначается Ord или On.

- Каждый ординал α — это множество всех ординалов $\beta < \alpha$
- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ = множество всех ординалов $\beta \leq \alpha$ — наименьший ординал, больший α
- Для множества ординалов A $\quad \bigcup A = \sup A$ (очень легко проверить). Множество $\sup A$ иногда обозначают $\lim A$.
- Класс ординалов собственный (по аксиоме регулярности).

Сам Кантор понимал ординалы как классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств и называл их *порядковыми типами*.

Теорема 2. Каждое вполне упорядоченное множество $(P, \leq)$ порядково изоморфно единственному ординалу.

Доказательство. P вполне упорядочено $\implies$ по аксиоме подстановки можно определить множество S ординалов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь начальному интервалу P. Ординал $\alpha = \sup S = \bigcup S$ изоморфен P. Действительно, если это не так, то по теореме об изоморфизме либо α изоморфен начальному интервалу $I \subsetneq P$ (а тогда $\alpha \in \alpha$ в противоречие с аксиомой регулярности), либо P изоморфно начальному интервалу α. Любой начальный интервал α — это некоторый ординал $\beta < \alpha$, который изоморфен начальному интервалу P, а вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу. Отсюда же вытекает единственность. ■

Определение 3. Ординал α называется *изолированным*, или *непредельным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого β. В противном случае α называется *предельным* ординалом.

Замечание 2. Ординал α является предельным тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup \alpha$.

Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует существование наименьшего непустого предельного ординала ω. Ординалы, меньшие ω (т.е. элементы ω) называются *натуральными числами*, а сам ординал ω называется *множеством натуральных чисел.* Натуральные числа обозначаются $0, 1, 2, \dots, i, j, k, l, m, n, \dots$.

(Привычнее было бы сказать, что натуральные числа — непустые элементы множества ω; иногда, а за пределами теории множеств почти(?) всегда, под множеством натуральных чисел имеют в виду $\omega \setminus \{\varnothing\}$, и тогда его обозначают $\mathbb{N}$.)

Трансфинитная индукция и рекурсия

Каждый ординал строго вполне упорядочен отношением $\in$ $\implies$ в каждом непустом классе ординалов есть наименьший элемент.

Принцип трансфинитной индукции:
Пусть $\boldsymbol{C}$ — класс ординалов такой, что

1. $\varnothing \in \boldsymbol{C}$,
2. $\alpha \in \boldsymbol{C} \to \alpha + 1 \in \boldsymbol{C}$,
3. $A \in \boldsymbol{C} \to \sup A \in \boldsymbol{C}$.

Тогда $\boldsymbol{C} = \mathrm{Ord}$.

Доказательство. Если утверждение неверно, то существует наименьший ординал $\alpha \notin \boldsymbol{C}$, а это противоречит условиям 1–3. ■

На практике принцип индукции часто приходится применять к множествам, а не классам множеств. Доказательство такое же.

Трансфинитная рекурсия похожа на трансфинитную индукцию, но вместо того чтобы *доказывать*, что что-то верно для всех ординалов, мы *строим* последовательность объектов, по одному для каждого ординала.

Принцип трансфинитной рекурсии:
Для любой функции-класса $G\colon \boldsymbol{V} > \boldsymbol{V}$ (где $\boldsymbol{V}$ — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F\colon \mathrm{Ord} \to \boldsymbol{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*, Москва: МЦНМО, 2012

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема 3 (Цермело). Любое множество можно вполне упорядочить.

Теорема 4 (лемма Цорна). Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело}, \quad \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело} \vdash \mathrm{ZFC}$$

и

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна}, \quad \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна} \vdash \mathrm{ZFC}.$$

Принцип трансфинитной рекурсии равносилен схеме аксиом подстановки в том же смысле.

Пример применения леммы Цорна.

Теорема 5. В любом векторном пространстве V имеется базис. Более того, всякое линейно независимое множество векторов в V можно дополнить до базиса.

Теорема 6 (оригинальная формулировка леммы Цорна). Пусть $\mathscr{X}$ — семейство множеств со свойством: если $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ таково, что для любых $X, Y \in \mathscr{Y}$ либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, то $\bigcup \mathscr{Y} \in \mathscr{X}$. Тогда в семействе $\mathscr{X}$ есть максимальный по включению элемент.

Доказательство. Возьмём в качестве $\mathscr{X}$ семейство всех линейно независимых множеств в V, содержащих данное множество $\mathcal{S}$. Пусть $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ удовлетворяет условию в лемме. Возьмём любые $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \bigcup \mathscr{Y}$. Для $i \in \mathbb{N}$ найдём $\mathcal{S}_i \in \mathscr{Y}$, для которых $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{S}_i$. По условию на $\mathscr{Y}$ множества $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ можно упорядочить по включению. Пусть $\mathcal{S}_{k_1} \subset \mathcal{S}_{k_2} \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{k_n}$. Тогда $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{S}_{k_n}$. Множество $\mathcal{S}_{k_n}$ линейно независимо $\implies$ $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независимы $\implies$ $\bigcup \mathscr{Y}$ линейно независимо. Лемма Цорна $\implies$ в $\mathscr{X}$ есть максимальное линейно независимое множество, содержащее $\mathcal{S}$. ■

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X. Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\leq$ на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения «$\varphi(y)$ верно для всех $y < x$». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

То же рассуждение работает в случае, когда $\leq$ — фундирование: если $\varphi(x_0)$ верно для всех минимальных элементов x_0 и из утверждения «для любого $y < x \quad \varphi(y)$ верно» выводится $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$ — если $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\} \neq \varnothing$, то существование минимального элемента в этом множестве приводит к противоречию.

Кардиналы

Для каждого множества X Кантор определял мощность $|X|$ как класс всех множеств, находящихся во взаимно однозначном соответствии с X ($|X| = |Y|$, если существует биекция $X \rightleftarrows Y$). Мощности сравниваются так:

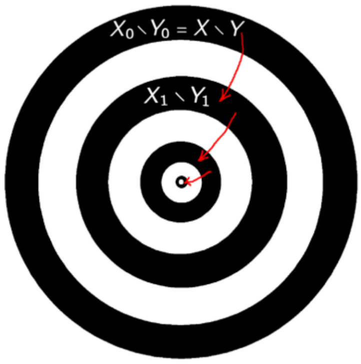
$$|X| \leq |Y|, \qquad \text{если существует инъекция } X \to Y \text{ (или сюръекция } Y \to X)$$

Теорема 7 (Кантора–Бернштейна–Шрёдера). Если $|X| \le |Y|$ и $|Y| \le |X|$, то $|X| = |Y|$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $X_1 \subset Y \subset X$ и $|X_1| = |X|$, то $|X| = |Y|$. Пусть $f\colon X \to X_1$ — биекция. Положим

$$\begin{array}{llll} X_0 = X, & X_1 = f(X_0), & X_2 = f(X_1), & \ldots; \\ Y_0 = Y, & Y_1 = f(Y_0), & Y_2 = f(Y_1), & \ldots. \end{array}$$

Для $x \in X$ положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \exists n \in \omega\colon x \in X_n \setminus Y_n, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$



Отображение $g\colon X \to Y$ — биекция.

∎

Определение 4. *Мощность* $|X|$ множества X — это наименьший ординал α, для которого существует биекция $X \rightleftarrows \alpha$.

Определение 5. Ординал α называется *кардиналом*, если не существует биекции между α и β ни для какого ординала $\beta < \alpha$.

Кардиналы обозначаются буквами κ, λ, ...

Кардиналы называются также *алефами*. Кантор использовал для них обозначение $\aleph_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$:

- $\aleph_0 = \omega$,
- $\aleph_{\alpha+1} =$ наименьший кардинал, больший $\aleph_\alpha$,
- для предельного ординала α $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.

Сейчас наравне с $\aleph_\alpha$ используется обозначение ω_α (которое сам Кантор использовал только для ординалов):

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1} =$ наименьший кардинал, больший ω_α,
- для предельного ординала α $\omega_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Мощность определена для каждого множества. Действительно, по теореме Цермело любое множество можно вполне упорядочить, а каждое вполне упорядоченное множество порядково изоморфно единственному ординалу. Порядковый изоморфизм — биекция, поэтому для любого множества X существуют ординал α и биекция $\alpha \rightleftarrows X$. Значит, множество ординалов $\{\beta \in \alpha + 1 : \text{существует биекция } \beta \rightleftarrows X\}$ непусто, и $|X|$ — его наименьший элемент.

Для каждого бесконечного множества X $\exists \alpha \in \mathrm{Ord}\colon |X| = \omega_\alpha$.

Определение 6. Множество X *счётно*, если $|X| = \omega$. Множество X *несчётно*, если $|X| > \omega$.

Арифметика кардиналов

Для непересекающихся множеств X и Y

- $|X| + |Y| = |X \cup Y|$
- $|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$
- $|Y|^{|X|} = |Y^X|$

  (напомним: $Y^X = \{f \subset X \times Y : f$ — отображение $X \to Y\}$)
- в частности, $2^{|X|} = |\{\chi_A : A \subset X\}| = |\mathscr{P}(X)|$

  ($\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств X,

  χ_A — характеристическая функция подмножества $A \subset X$)

Свойства арифметических операций:

- $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $\quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$;
- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;
- если $\kappa \le \lambda$, то $\kappa + \mu \le \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \le \lambda^\mu$;
- если $1 \le \kappa$ и $\lambda \le \mu$, то $\kappa^\lambda \le \kappa^\mu$;
- если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $\quad (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\quad \kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \ge 2$ и $\lambda \ge 1$, то
- $\max\{\kappa, 2^\lambda\} \le \kappa^\lambda \le \max\{2^\kappa, 2^\lambda\}$;
- в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \le 2^\lambda$, $\kappa \ge 2$.

- $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $\quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$;
- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;
- если $\kappa \le \lambda$, то $\kappa + \mu \le \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \le \lambda^\mu$;
- если $1 \le \kappa$ и $\lambda \le \mu$, то $\kappa^\lambda \le \kappa^\mu$;
- если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $\quad (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\quad \kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \ge 2$ и $\lambda \ge 1$, то
- $\max\{\kappa, 2^\lambda\} \le \kappa^\lambda \le \max\{2^\kappa, 2^\lambda\}$;
- в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \le 2^\lambda$, $\kappa \ge 2$.

Теорема 8 (Кантора). Для любого кардинала κ $\;2^\kappa > \kappa$.

Доказательство. Надо доказать: $|\mathscr{P}(X)| > |X|$ для любого множества X. Ясно, что $|\mathscr{P}(X)| \ge |X|$. Для любого отображения $f\colon X \to \mathscr{P}(X)$

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\} \notin \operatorname{ran} f \quad (\operatorname{ran} f \text{ — множество значений } f).$$

Действительно, пусть $Y = f(y)$. По определению множества Y если $y \in Y$, то $y \notin Y$, и если $y \notin Y$, то $y \in Y$.

Не существует сюръекции $X \to \mathscr{P}(X) \implies |\mathscr{P}(X)| > |X|$. ■

Определение 7. Кардинал 2^ω называется *мощностью континуума*.

Континуум-гипотеза (CH): $\boxed{2^\omega = \omega_1}$.

CH верна $\iff$ существует сюръекция $\omega_1 \to \mathscr{P}(\omega)$.
CH неверна $\iff$ существует инъекция $\omega_2 \to \mathscr{P}(\omega)$.