Важнейший пример компакта — пространство $W_1 = \{\alpha : \alpha \le \omega_1\}$ всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией. Докажем, что W_1 компактно.

Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства W_1 (отметим, что здесь мы обозначаем индексы буквой ι, а не α, а букву α резервируем для ординалов). Рассмотрим множество A всех $\alpha \le \omega_1$, для которых замкнутый интервал $[0, \alpha]$ содержится в объединении конечного числа элементов покрытия $\mathscr{U}$. Нам надо показать, что множество $W_1 \setminus A$ пусто. Предположим, что $W_1 \setminus A$ непусто, и обозначим через α_0 наименьший элемент этого множества. Существует $\iota_0 \in I$, для которого $\alpha_0 \in U_{\iota_0}$. Ясно, что $0 < \alpha_0$ (так как $0 \in A$). Значит, найдётся $\beta < \alpha_0$, для которого $(\beta, \alpha_0] \subset U_{\iota_0}$. По определению ординала α_0 имеем $\beta \in A$, а из определения множества A следует, что $[0, \beta] \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ для некоторых $\iota_1, \dots, \iota_k \in I$. Поэтому $[0, \alpha_0] \subset U_{\iota_0} \cup U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$, что противоречит определению ординала α_0. Таким образом, $W_1 \setminus A = \varnothing$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь подпространство $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ пространства W_1. Оно не может быть компактным, поскольку вкладывается в качестве незамкнутого подмножества в хаусдорфово пространство W_1 (ω_1 является его предельной точкой). Тем не менее всякое бесконечное множество $A \subset W_1^0$ имеет предельную точку в W_1^0. Действительно, из элементов любого такого множества (возможно, не всех) легко составить строго возрастающую последовательность ординалов. Понятно, что супремум множества значений этой последовательность является предельной точкой рассматриваемого множества. Таким образом, все замкнутые дискретные множества в W_1^0 конечны.

Кроме того, всякая непрерывная функция на W_1^0 ограничена. Действительно, предположим, что $f\colon W_1^0 \to \mathbb{R}$ — непрерывная неограниченная функция, т.е. f принимает сколь угодно большие положительные или сколь угодно малые отрицательные значения. Пусть для определённости f принимает сколь угодно большие значения. Определим по индукции множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ в $f(W_1^0)$ следующим образом: возьмём любое число $x_1 \in f(W_1^0)$; считая, что x_n уже определено, выберем в $f(W_1^0)$ точку $x_{n+1} > x_n + 2$.

В прообразе $f^{-1}(x_n)$ каждой точки $x_n \in X$ выберем точку α_n и положим $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset W_1^0$; ясно, что множество A бесконечно. Всякая точка $\alpha \in W_1^0$ имеет открытую окрестность $f^{-1}\big((f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1)\big)$, которая содержит не более одной точки из A. Следовательно, бесконечное множество $A \subset W_1^0$ не имеет точек накопления, а значит, и предельных точек в W_1^0, а таких множеств не существует. Отсюда вытекает, что и неограниченных непрерывных функций на W_1^0 не существует.

Таким образом, W_1^0 псевдокомпактно (и даже счётно компактно), но не компактно, а значит, и не паракомпактно.

Пространство W_1^0 хаусдорфово и локально компактно, будучи открытым подпространством (дополнением до точки) компакта W_1. Понятно, что оно удовлетворяет первой аксиоме счётности — у каждой точки $\alpha \in W_1^0$ базу окрестностей составляют интервалы вида $(\beta, \alpha + 1)$, где $\beta < \alpha$.

Покажем, что пространство W_1^0 нормально. Пусть A и B — замкнутые множества в W_1^0. Предположим, что A и B неограничены в упорядоченном множестве W_1^0. Тогда легко построить последовательности $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ счётных ординалов со свойствами $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$ и $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n < \omega_1$. Обозначим этот супремум γ. Любая окрестность точки γ в W_1^0 содержит интервал вида (γ_1, γ_2), где $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, а любой такой интервал содержит как точки вида α_i, так и точки вида β_i. Значит, точка γ является предельной как для множества A, так и для множества B, и в силу замкнутости этих множеств она принадлежит их пересечению. Таким образом, если замкнутые множества A и B в W_1^0 не пересекаются, то либо A, либо B ограничено. Пусть для определённости A ограничено, т.е. $A \subset [0, \alpha_0]$, где α_0 — некоторый счётный ординал. Множество $[0, \alpha_0]$ замкнуто в компакте W_1 и потому само компактно, а значит, компактно и A. Следовательно, у A и B есть непересекающиеся окрестности в W_1^0.