

Вопросы по линейной алгебре.

1. Векторные пространства. Простейшие следствия аксиом. Примеры.
2. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. Основные свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.
3. Базис. Координаты. Примеры. Переход к новому базису. Лемма о линейной зависимости системы из $n+1$ вектора в пространстве \mathbb{R}^n . Размерность.
4. Подпространства. Их пересечения, объединения, суммы. Связь размерностей суммы и пересечения. Прямая сумма. Параметрические уравнения подпространства.
5. Линейная оболочка. Ранг системы векторов и размерность линейной оболочки. Лемма о базисном миноре. Сохранение ранга системы векторов при элементарных преобразованиях. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Линейные отображения. Матрица отображения. Ранг матрицы и размерность образа. Изоморфизм пространства линейных отображений и соответствующего пространства матриц. Связь размерностей образа и ядра. Ранг произведения матриц.
7. Линейные функционалы. Примеры. Сопряженное пространство. Его размерность. Второе сопряженное пространство. Рефлексивность.
8. Аннулятор. Нулевое подпространство. Связи между ними. Оценки размерностей. Пространство решений однородной линейной системы. Связь ранга системы с размерностью пространства решений. Представление произвольного подпространства в виде пространства решений однородной линейной системы.
9. Аффинное пространство. Аффинная система координат. Размерность. Примеры. Переход к новой аффинной системе координат.
10. Взаимное расположение плоскостей.
11. Плоскости как пространства решений линейных систем. Условие параллельности вектора и плоскости.
12. Гиперплоскости. Положительное и отрицательное подпространства. Выпуклость. Симплекс. Бариецентрические координаты.
13. Билинейные функции и формы. Их матрицы. Изменение матрицы при переходе к новому базису. Ранг билинейной функции.
14. Пространство билинейных функций как прямая сумма пространств симметричных и кососимметричных функций. Квадратичные функции. Приведение к каноническому виду методом Лагранжа.
15. Приведение квадратичной функции к нормальному виду методом Якоби.
16. Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенные формы. Определитель Грама. Критерий Сильвестра. Неравенство Коши-Буняковского.
17. Линейные операторы. Примеры. Алгебра операторов и алгебра матриц. Изменение матрицы оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы. Обратимость оператора.
18. Инвариантные подпространства. Вид матрицы оператора, когда первые векторы базиса образуют базис в инвариантном подпространстве. Одномерные

инвариантные подпространства и собственные векторы. Пространство собственных векторов, отвечающих собственному значению λ .

19. Характеристический многочлен и его инвариантность. Инвариантность ранга матрицы $A - \lambda E$. Корни характеристического многочлена и собственные значения. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств.

20. Разложение характеристического многочлена, соответствующее разложению пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Критерий диагонализированности матрицы оператора. Представление произвольного оператора в виде прямой суммы невырожденного и нильпотентного.

21. Существование канонического базиса для нильпотентного оператора. Инвариантные характеристики канонического базиса.

22. Характеристический многочлен нильпотентного оператора. Разложение характеристического многочлена произвольного оператора, соответствующее выделению нильпотентной составляющей. Инвариантные подпространства операторов $A - \lambda E$. Их характеристические многочлены. Корневое подпространство. Его размерность.

23. Жорданова форма. Теорема Гамильтона-Кэли.

24. Евклидовы пространства. Ортонормированные базисы. Лемма о линейной независимости ортогональной системы ненулевых векторов. Ортогональное дополнение. Процесс ортогонализации.

25. Метрическая изоморфность евклидовых пространств размерности n . Ортогональные матрицы. Общий вид линейного функционала в евклидовом пространстве. Связь между линейными операторами и билинейными функциями в евклидовых пространствах.

26. Псевдоевклидовы пространства. k -ортогональные матрицы. Пространство Минковского. Гиперболические повороты плоскости.

27. Ориентированный объем.

28. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Их матрицы. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. Все собственные значения самосопряженного оператора действительны.

29. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Их матрицы. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям. Связь размерности пространства собственных векторов с кратностью соответствующего корня.

30. Общий вид изометрического преобразования. Общий вид кососимметрического преобразования трехмерного пространства. Представление произвольного преобразования в виде композиции самосопряженного и ортогонального (без предположения о невырожденности).

31. Приведение квадратичной функции к главным осям. Приведение пары форм.

32. Тензорные произведения. Полилинейные функции. Базис в тензорном произведении. Свертка. Координаты свертки. Различные интерпретации двухвалентных тензоров.

33. Связь между матрицами перехода к новому базису и преобразования координат в исходном и сопряженном пространствах. Изменение координат тензора при переходе к новому базису. Содержание формул преобразования координат для одновалентных и двухвалентных тензоров.

34. Тензоры в евклидовых пространствах. Метрический тензор. Изменение валентности.

35. Альтернирование тензоров. Свойства кососимметрических тензоров. Формула

$$\text{Alt} \left(\text{Alt} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) \otimes \text{Alt} (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}) \right) = \text{Alt} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l})$$

Внешнее произведение. Его основные свойства. Базис в G^k . Размерность G^k . Свертка G_k и G^k .

36. Простые поливекторы и внешние формы. Пропорциональные простые поливекторы. n -мерный объем, векторное произведение в трехмерном пространстве и его обобщение в \mathbb{R}^n .

37. Бивекторы. Ранг бивектора. Теорема о представлении бивектора в виде суммы простых бивекторов. Лемма Картана.

38. Гиперповерхности второго порядка. Квадратичная часть многочлена как функция вектора (не зависящая от выбора системы координат). Инварианты. Приведение к каноническому виду. Замечания о классификации гиперповерхностей.

39. Гиперповерхности второго порядка. Квадратичная часть многочлена как функция вектора (не зависящая от выбора системы координат). Центр многочлена. Сопряженные направления. Сопряженные плоскости. Конус асимптотических направлений.

40. Определение вида многочлена второго порядка по ортогональным инвариантам.