Задание N 1

1. Проверьте выполнение равенств:
для $A, B, C \subset X$

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

(b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

для $A, C \subset X$, $B, D \subset Y$

(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

(d) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;

(e) $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = (A \times B \setminus C \times B) \setminus A \times D$;

(f) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

2. Пусть $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ и $f : X \to Y$. Докажите, что

(a) $X_0 \subset f^{-1}(f(X_0))$ и равенство выполняется если f инъективно;

(b) $f(f^{-1}(Y_0)) \subset Y_0$ и равенство выполняется если f сюръективно.

3. Пусть $X_0, X_1 \subset X$, $Y_0, Y_1 \subset Y$ и $f : X \to Y$. Докажите, что:

(a) $f^{-1}(Y_0 \cap Y_1) = f^{-1}(Y_0) \cap f^{-1}(Y_1)$;

(b) $f^{-1}(Y_0 \cup Y_1) = f^{-1}(Y_0) \cup f^{-1}(Y_1)$;

(c) $f^{-1}(Y_0 \setminus Y_1) = f^{-1}(Y_0) \setminus f^{-1}(Y_1)$;

(d) $f(X_0 \cap X_1) \subset f(X_0) \cap f(X_1)$ и равенство выполняется если отображение инъективно;

(e) $f(X_0 \cup X_1) = f(X_0) \cup f(X_1)$;

(f) $f(X_0 \setminus X_1) \supset f(X_0) \setminus f(X_1)$ и равенство выполняется если отображение инъективно.

4. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $Z_0 \subset Z$. Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(Z_0) = f^{-1}(g^{-1}(Z_0))$.

5. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и отображение $g \circ f$ инъективно (сюръективно). Докажите, что f инъективно (g сюръективно).

6. Докажите, что отображение обратимо в том и только том случае, если оно биективно.

7. Пусть $\mathcal{R}$ — отношение эквивалентности на X и $Y \subset X$. Докажите, что ограничение $\mathcal{R}|_Y$ отношения $\mathcal{R}$ на Y есть отношение эквивалентности.

8. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дано подмножество

$$A = \{(x, y) : y = x + 1,\ 0 < x < 2\}.$$

Описать отношение эквивалентности на прямой $\mathbb{R}$, которое является пересечением всех отношений эквивалентности, содержащих множество A (т.е. наименьшее отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$, содержащее множество A).

9. Будет ли упорядочением на $\mathbb{Z}$ (целые числа) отношение: $a \le b$ в том и только случае, если $a|b$ (a делит b)?

10. Будет ли упорядочением на 2^A (семействе всех подножеств множества A) отношение: $B \le C$ в том и только случае, если $B \subset C$?

11. Пусть $(X, \le)$ — упорядоченное множество и $Y \subset X$. Докажите, что отношение $\le|_Y$ есть отношение порядка на Y, если $\le$ есть линейный порядок на X, то $\le|_Y$ является линейным порядком на Y.

12. Докажите, что множества $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ с лексикографическим порядком не подобны.

13. (а) Докажите, что у конечного вполне упорядоченного множества из n элементов $n-1$ начальный отрезок.
(б) Докажите, что в бесконечном вполне упорядоченном множестве содержатся начальные отрезки из n элементов, $n \in \mathbb{N}$.

(в) Пусть X — вполне упорядоченное множество, $[x_0, x)$ — начальный отрезок X. Докажите, что тогда или $[x_0, x) \cup \{x\} = X$, или $[x_0, x) \cup \{x\}$ — начальный отрезок.

(г) Докажите, что объединение начальных отрезков вполне упорядоченного множества X или начальный отрезок, или само множество X.

(д) Докажите, что если φ задает подобие множеств X и Y, $[x_0, x)$ — начальный отрезок X, то $\varphi|_{[x_0,x)}$ (ограничение φ на $[x_0, x)$) задает подобие $[x_0, x)$ и начального отрезка $[y_0, f(x))$ в Y.

14. Докажите, что единственным подобием на себя вполне упорядоченного множества является тождественное отображение.

15. Доказать, что для любого непустого множества X существует биекция $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ на $X^{\mathbb{N}}$ (где $X^{\mathbb{N}}$ — множество отображений из $\mathbb{N}$ в X).

16. Доказать, что произведение $\mathbb{N}^n$ счетно при любых $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что произведение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (или множество отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) имеет мощность континуума.

17. Найти мощность множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (множества отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$).

---

18. Докажите, что на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ отношение $(a_1, a_2, \dots) < (b_1, b_2, \dots)$ в том и только том случае, если $a_i = b_i$ для $i < n$ и $a_n < b_n$, является линейным, но не вполне упорядочением.

19. (a) Докажите, что линейно упорядоченное множество A не является вполне упорядоченным в том и только том случае, если A содержит множество, подобное последовательности $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Докажите, что линейно упорядоченное множество A вполне упорядочено в том и только том случае, если его любое счетное подмножество вполне упорядочено.

20. (а) Найдите мощность всех конечных подмножеств бесконечного множества X.
(б) Найдите мощность всех счетных подмножеств бесконечного множества X.

21. Пусть X — бесконечное множество. Докажите, что множества $X \times X$ и X равномощны.

22. (а) Какая мощность множества всех порядковых типов конечного множества?
(б) Какая мощность множества всех порядковых типов счетного множества?

Задание N 2

1. Описать базы топологии дискретного и антидискретного пространств.

2. Пусть $Y = [-1, 1]$ подпространство $\mathbb{R}$ со стандартной топологией. Какие из подмножеств Y открыты в Y, открыты в $\mathbb{R}$: 1) $\{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$, 2) $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$, 3) $\{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$, 4) $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$, 5) $\{x : 0 < |x| < 1, \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}\}$?

3. Найти точную верхнюю и нижнюю грани топологий $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ и $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ на $X = \{a, b, c\}$.

4. Доказать:
1) топологии в Примере 8.5 Лекции 2 корректно определены,

2) $\mathcal{T}_4 \leq \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$,

3) $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_4$ несравнимы, $\mathcal{T}_5$ и $\mathcal{T}_3$ несравнимы.

4) найти точную верхнюю и нижнюю грани данных топологий.

5. Доказать, что любое открытое подмножество прямой является объединением не более чем счетного числа дизъюнктных интервалов (интервалами дополнительно считаются вся прямая и открытые лучи (∞, a), (a, ∞)).
Какова мощность стандартной топологии прямой?

6. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

7. Пусть Y подмножество X. Доказать, что подмножество F замкнуто в Y в том и только том случае, если существует замнутое подмножество Φ в X такое, что $F = \Phi \cap Y$.

8. Пусть Y открытое (замкнутое) подмножество X. Доказать, что любое открытое (замкнутое) подмножество Y открыто (замкнуто) в X.

9. Будет ли дискретной топология лексикографического порядка на квадрате $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ с естественным вполне упорядочением?

10. Доказать, что топология на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$, индуцированная топологией лексикографического порядка на квадрате $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$, и топология лексикографического порядка на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ отрезка $[0, 1]$ различны.

11. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана прямоугольная система координат, $s = (x_s, y_s), q = (x_q, y_q)$. Определим отображения $\rho_\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$:

(ρ_d) $\rho_d(s, q) = 1$, если $s \neq q$, $\rho_d(s, q) = 0$, если $s = q$;

(ρ_1) $\rho_1(s, q) = |x_s - x_q| + |y_s - y_q|$;

(ρ_2) $\rho_2(s, q) = \sqrt{|x_s - x_q|^2 + |y_s - y_q|^2}$;

(ρ_∞) $\rho_\infty(s, q) = \max\{|x_s - x_q|, |y_s - y_q|\}$;

(ρ_j) $\rho_j(s, q) = |y_s - y_q|$, если $x_s = x_q$, $\rho_j(s, q) = |x_s - x_q| + |y_s| + |y_q|$, если $x_s \neq x_q$.

Проверить, что они являются метриками. Нарисовать единичные открытые шары точек в этих метриках. Сравнить топологии, порождаемые этими метриками.

12. Пусть

(ρ_1) $\ell^1 = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$;

(ρ_2) $\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $||\mathbf{x}||_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$;

(ρ_∞) $\ell^\infty = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $||\mathbf{x}||_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

Проверить, что нормированные пространства корректно определены. Выписать формулы для метрик, задаваемых этими нормами.

13. Докажите, что на пространстве $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[0, 1]$ нормы

(ρ_1) $||f||_1 = \int\limits_0^1 |f(x)|dx$;

(ρ_2) $||f||_2 = (\int\limits_0^1 |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$;

(ρ_∞) $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

корректно определено. Выписать формулы для метрик, задаваемых этими нормами. Сравнить топологии, порождаемые этими нормами.

14. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ и $\rho_2(x,y) = \rho(x,y)/(1+\rho(x,y))$, являются метриками на множестве X. Сравнить топологии, порождаемые метриками ρ, ρ_1 и ρ_2.

15. Может ли в метрическом пространстве открытый шар большего радиуса содержаться в открытом шаре меньшего радиуса?

---

16. Пусть на множестве X дано семейство топологий $\mathcal{A}$. Доказать, что существуют: точная верхняя грань топологий из $\mathcal{A}$ (наименьшая топология, большая любой топологии из $\mathcal{A}$); точная нижняя грань топологий из $\mathcal{A}$ (наибольшая топология, меньшая любой топологии из $\mathcal{A}$).

17. Описать открытые подмножества прямой в топологиях из задачи 4. Каковы мощности их топологий?

18. Привести пример топологического пространства, у которого существует предбаза топологии, мощность которой меньше мощности любой его базы.

Верно ли, что на конечном дискретном пространстве из n точек количество элементов в любой предбазе не менее n?

Докажите, что если мощность любой базы топологического пространства бесконечна (дополнительно $\geq \kappa$), то и мощность любой предбазы бесконечна (дополнительно $\geq \kappa$).

19. Пусть p — простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ представлена в виде $\frac{r}{s}p^\alpha$, где r, s и $\alpha \in \mathbb{Z}$, r, s взаимно просты с p. Положим $\rho(x,y) = p^{-\alpha}$ для $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Доказать, что ρ — метрика (*p-адическая метрика* на $\mathbb{Q}$). Сравнить евклидову топологию на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и топологию $\mathbb{Q}$, порожденную p-адической метрикой на $\mathbb{Q}$.

20. *Пространство Бэра.* Пусть X произвольное бесконечное множество. На множестве $X^{\mathbb{N}}$ введем метрику ρ следующим образом: для $p = (x_1, x_2, ...), q = (y_1, y_2, ...) \in \mathcal{B}$ полагаем $\rho(p,q) = 0$, если $p = q$, и $\rho(p,q) = 1/k$, если k наименьшее натуральное число, для которого $x_k \neq y_k$. Показать, что метрика корректно определена. Дать описание открытых шаров.

21. *"Метризуемый еж".* Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Для $p, q \in X$ полагаем $\rho(p,q) = |p - q|$, если p и q принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, и $\rho(p,q) = p + q$, если p и q не принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$. Показать, что метрика корректно определена. Дать описание открытых шаров.

22. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $M \subset X$. Если $\sup\big\{\rho(x,y) : x, y \in M\big\} = d < \infty$, то множество M называется *ограниченным*, а число d называется его *диаметром* и обозначается через $\mathrm{diam}(M)$. Докажите, что для любого метрического пространства (X, ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A,B) = \max\{\sup\{\rho(a,B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b,A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$. Можно ли отказаться от требования их замкнутости? ограниченности?

23. Доказать метризуемость топологии лексикографического порядка на квадрате $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ линейно упорядоченного множества $\mathbb{R}$. Привести пример метрики, индуцирующей эту топологию.

Задание N 3

1. Докажите:

(1) $\mathrm{Cl}A = A \cup \mathrm{Bd}A$;

(2) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Bd}A$;

(3) $X \setminus \mathrm{Bd}A = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(4) $\mathrm{Bd}A = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)$;

(5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \subset A$;

(6) A открыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \cap A = \emptyset$;

(7) $A^d \setminus A = \mathrm{Bd}A \setminus A$, где A^d — множество предельных точек A;

(8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

2. Справедливы ли следующие соотношения:

(1) если $A \subset B$, то $\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$, $\mathrm{Cl}A \subset \mathrm{Cl}B$;

(2) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$; $\mathrm{Cl}(A \cap B) = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$; $\mathrm{Bd}(A \cap B) = \mathrm{Bd}A \cap \mathrm{Bd}B$;

(3) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$; $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$; $\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$;

(4) $\mathrm{Bd}(A \cap B) \subset \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$;

(5) $\mathrm{Bd}(X \setminus A) = \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}A) \subset \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Bd}A$;

(6) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$?

3. Пусть $C : 2^X \to 2^X$ — оператор на семействе подмножеств множества X, удовлетворяющий условиям:

(1) $C(\varnothing) = \varnothing$;

(2) $M \subset C(M)$;

(3) $C(M \cup N) = C(M) \cup C(N)$;

(4) $C(C(M)) = C(M)$.

Докажите, что на X существует топология такая, что $\mathrm{Cl}(M) = C(M)$ для всех $M \in 2^X$.

4. Найдите замыкания подмножеств лексикографически упорядоченного квадрата I^2:

(1) $C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$;

(2) $D = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$;

(3) $E = \{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$.

5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $M \subset X$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) $x \in \mathrm{Cl}(M)$;

(2) существует последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек множества M, сходящаяся к x;

(3) $\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) : y \in M\} = 0$.

6. Найдите внутренность и границу следующих подмножеств $\mathbb{R}^2$:

(1) $A = \{(x, y) : y = 0\}$;

(2) $B = \{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}$;

(3) $C = A \cup B$;

(4) $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}\}$;

(5) $E = \{(x, y) : 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$;

(6) $F = \{(x, y) : x \neq 0, y \leq \frac{1}{x}\}$.

7. Пусть $A \subset Y \subset X$. Докажите, что $\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y$. Верна ли аналогичная формула для внутренностей множества A в X и Y?

8. Найдите замыкание множества $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ на прямой в топологии Зариского.

9. Докажите, что следующие условия на отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — непрерывно;

(d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\mathrm{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}B)$;

(e) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}B)$.

10. Докажите, что тождественное отображение $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ непрерывно в том и только том случае, если $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$ (топология $\mathcal{T}_1$ на X не слабее топологии $\mathcal{T}_2$).

11. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $M \subset X$. Будет ли образ предельной точки множества M предельной точкой множества $f(M)$?

12. Пусть Y — линейно упорядоченное пространство с топологией линейного порядка, $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения.
a) Докажите, что множество $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ замкнуто в X.
b) Докажите, что отображение $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ непрерывно.

13. Пусть X является счетным объединением замкнутых множеств $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ограничения $f|_{A_i}$ отображения $f : X \to Y$ на подмножества A_i непрерывны, $i \in \mathbb{N}$. Будет ли отображение f непрерывно?

14. Отображение метрических пространств $f : X \to Y$ называется *изометрическим вложением*, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$. Докажите, что любое изометрическое вложение непрерывно.

15. Отображение f метрического пространств X в себя называется *сжимающим* (*липшицевым*), если существует $0 < \alpha < 1$ (соответственно $\alpha > 0$) такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$. Докажите, что любое сжимающее (любое липшицево) отображение метрического пространства X непрерывно.

16. Докажите, что любое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку.

---

17. Задайте условия на оператор $I : 2^X \to 2^X$ такие, чтобы на X существовала топология, для которой $\mathrm{Int}(M) = I(M)$ для всех $M \in 2^X$.

18. Подмножество пространства ℓ^2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом*. Докажите, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ^2; внутренность гильбертова куба в ℓ^2 — пустое множество.

19. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int.

20. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n попарно дизъюнктных открытых множеств, имеющих одну и ту же границу?

21. Докажите, что на пространстве T (счетных трансфинитов $T(\omega_1)$ и первого несчетного трансфинита ω_1 Пример 7.1 Лекции 1) с топологией линейного порядка $\mathrm{Cl}(T(\omega_1)) = T$, и не существует последовательности точек $T(\omega_1)$, сходящейся к ω_1.

Задание N 4

1. Следующие условия на биективное отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — гомеоморфизм;

(b) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f(O)$ открыто;

(c) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f(F)$ замкнуто;

(d) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(O)$ открыто;

(e) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

2. Если $f : X \to Y$ — гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ выполнено:

(a) $f(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}(f(A))$;

(b) $f(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}(f(A))$;

(c) $f(\mathrm{Bd}A) = \mathrm{Bd}(f(A))$.

3. Постройте гомеоморфизмы:

(a) $[0,1]$ на $[a,b]$, $a < b$;

(b) $(0,1]$ на $[0,1)$;

(c) $(0,1)$ на $\mathbb{R}$.

Докажите, что $[0,1]$, $[0,1)$ и $(0,1)$ попарно не гомеоморфны.

4. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1),\ y \in (0,1)\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$;

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\}$;

(g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus (0,0,1)$ (сфера S^2 без точки).

5. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,1]\}$;

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y = 0\}$.

6. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.

8. Отображение $f : X \to Y$ называется вложением, если f — гомеоморфизм X на подпространство $f(X)$. Докажите, что $\mathbb{Q}$ не вкладывается в $\mathbb{Z}$.

9. Докажите, что прямая в евклидовой топологии, прямая в топологии Зариского и прямая Зоргенфрея попарно не гомеоморфны.

10. Приведите пример непрерывного биективного отображения $f : X \to Y$ пространств X и Y, не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли при этом потребовать дополнительно, что $X = Y$?

11. Докажите, что n-ая степень прямой $\mathbb{R}$ (отрезка $I = [0, 1]$) гомеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ (кубу I^n — подпространству евклидова пространства $\mathbb{R}^n$), $n \in \mathbb{N}$.

12. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определим *тор* T^2 как поверхность вращения окружности

$$\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

Докажите, что тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1 \times S^1$ окружностей.

13. Для отображения $f : X \to Y$ множество $\{(x, f(x)) \subset X \times Y : x \in X\}$ называется *графиком отображения*. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \to Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?

14. Вложите $S^1 \times B^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, $S^2 \times I$ в $\mathbb{R}^3$, где B^2 — замкнутый круг единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, S^2 — двумерная сфера.

15. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Проверьте выполнение равенств:

(a) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}A \times \mathrm{Int}B$;

(b) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}A \times \mathrm{Cl}B$;

(c) $\mathrm{Bd}(A \times B) = \mathrm{Bd}A \times \mathrm{Bd}B$;

(d) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Bd}A \times B) \cup (A \times \mathrm{Bd}B)$;

(e) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Cl}A \times \mathrm{Bd}B) \cup (\mathrm{Bd}A \times \mathrm{Cl}B)$.

16. Докажите, если произведение f отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно, то и каждое отображение f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно.

17. Докажите, если диагональное произведение f отображений непрерывно, то и каждое отображение f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно.

18. Пусть $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :$ множество $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$ конечно$\}$. Найдите замыкание X в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

19. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathcal{T}_\rho$ — метрическая топология на X. Докажите, что метрика ρ непрерывна на квадрате пространства $(X, \mathcal{T}_\rho)$.

Докажите, что если метрика ρ (как отображение) непрерывна на квадрате пространства $(X, \mathcal{T})$, то $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_\rho$.

20. Объясните непрерывность бинарных операций сложения и умножения на $\mathbb{R}$, сложения и умножения на скаляр в нормированном пространстве над полем $\mathbb{R}$.

---

21. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$?

22. Докажите, что квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

23. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфно $S^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, где S^m — m-мерная сфера.

24. $T^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}$ — *k-мерный тор*. Вложите T^k в $\mathbb{R}^{k+1}$.

25. Всякая ли непрерывная биекция прямой в стандартной топологии (прямой Зоргенфрея) является гомеоморфизмом?

Опишите все гомеоморфизмы прямой в стандартной топологии.

Всякая ли биекция прямой в топологии Зариского является гомеоморфизмом?

26. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.

27. Подмножество пространства ℓ^2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом в* ℓ^2. Докажите, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ^2;
внутренность гильбертова куба в ℓ^2 — пустое множество.

Докажите, что гильбертов куб в ℓ^2 гомеоморфен *гильбертову кубу* $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (счетной степени отрезка).

Задание N 5

1. Докажите, что факторпространство $[0,1]/\{0,1\}$ (стягивание концов отрезка в точку) гомеоморфно окружности S^1.

Рассмотрите на прямой $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $\mathcal{R}$: $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Докажите, что факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по ее разбиению на классы отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ гомеоморфно окружности S^1.

2. Докажите, что факторпространство B^2/S^1 замкнутого круга B^2 на плоскости по граничной сфере S^1 (стягивание окружности в точку) гомеоморфно сфере S^2.

Докажите, что $\mathbb{R}^2/B^2$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.

3. Докажите, что факторпространство квадрата $I\times I = [0,1]\times[0,1]$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без двух сторон $(0,1) \times I$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}$, $t \in I$, гомеоморфно *цилиндру* $S^1 \times I$.

4. Докажите, что факторпространство

(a) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества $S^1 \times (0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(t,0),(t,1)\}$, $t \in S^1$,

(b) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$, двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}, \{(t,0),(t,1)\}$, $t \in (0,1)$, и подмножество $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

5. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(t,0)\}, \{(t,1),(1,t)\}$, $t \in I$, гомеоморфен сфере S^2.

6. Факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times[0,1]$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}$, $t \in I$, называется *лентой Мебиуса.*

Факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in (0,1)$, и подмножество $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ называется *бутылкой Клейна.*

Представьте бутылку Клейна как результат

(a) факторизации цилиндра $S^1 \times I$,

(b) факторизации ленты Мебиуса,

(c) склейки по границам двух копий ленты Мебиуса посредством тождественного отображения,

(d) склейки по границам двух копий цилиндра.

7. Докажите, что факторпространство квадрата $I\times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, гомеоморфно проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

8. Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

(a) как результат склейки по границе замкнутого круга B^2 и ленты Мебиуса,

(b) как результат факторизации ленты Мебиуса.

9. Докажите, что метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности, прямая Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счетности, прямая в топологии Зариского не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

10. Докажите, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

11. Привести пример метризуемого пространства, которое не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

12. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ (со стандартной топологией) имеется счетное всюду плотное подмножество.

13. Сохраняются ли первая (вторая) аксиомы счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

14. Докажите, что подмножество Z топологического пространства X всюду плотно в X в том и только том случае, если $Z \cap O \neq \varnothing$ для любого непустого открытого подмножества O пространства X.

15. Будет ли пересечение двух всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?
Будет ли пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно?

16. Подмножество A пространства X *нигде не плотно*, если множество $X \setminus \mathrm{Cl}A$ всюду плотно. Докажите, что канторово множество нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

17. Докажите, что если A нигде не плотное подмножество, то $\mathrm{Cl}A$ также нигде не плотное подмножество.

18. Докажите, что граница замкнутого (открытого) множества нигде не плотна. Приведите пример пространства и его подмножества, со всюду плотной границей.

19. Проверьте верность утверждений:

(a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен в образе;

(b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен в образе.

---

20. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение. Докажите, что если существует непрерывное отображение $g : Y \to X$ такое, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, то тогда f — факторное отображение.

Пусть $A \subset X$. Непрерывное отображение $f : X \to A$, для которого $f(a) = a$, $a \in A$, называется *ретракцией* X на A, подмножество A называется *ретрактом* X.

Доказать, что непрерывное отображение $f : X \to X$ является ретракцией на свой образ $f(X)$ в том и только том случае, если $f \circ f = f$.

Докажите, что ретракция — факторное отображение.

21. Рассмотрите на прямой $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $\mathcal{R}$: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Найдите факторпространство $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

22. Докажите, что любое несчетное замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

Докажите, что любое непустое замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ без изолированных точек имеет мощность континуум.

23. Докажите, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выбрать счетное семейство, являющееся базой.

24. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

25. Докажите, что тихоновское произведение континуума сепарабельнах пространств сепарабельно.

26. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

27. Найдите (опишите) все топологии на множестве X, для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

Задание N 6

1. Докажите, что пространство X есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

Докажите, что среди топологий на множестве X, в которых X является T_1-пространством, существует наименьшая.

2. Докажите, что прямая в топологии Зариского является нехаусдорфовым пространством.

3. Приведите пример двух различных непрерывных отображений $f_i : X \to Y,\ i = 1, 2$, пространства X в нехаусдорфово пространство Y, совпадающих на всюду плотном подмножестве Z.

4. Докажите, что для непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

Можно ли отказаться от условия хаусдорфовости образа?

5. Докажите, что пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ произведения замкнута в $X \times X$.

6. Докажите, что для непрерывного отображения $f : X \to Y$ пространства X в хаусдорфово пространство Y *график отображения* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ замкнут в $X \times Y$. Следует ли из замкнутости графика отображения его непрерывность?

7. Докажите, что пространство из Примера 8.5.5 Лекции 2 хаусдорфово не регулярно.

8. Докажите, что выполнение аксиом T_0 и T_3 эквивалентно выполнению аксиом T_1 и T_3.

9. Докажите, что в регулярном пространстве любая точка и замкнутое множество, ее не содержащее, имеют дизъюнктные окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Докажите, что следующие условия на пространство X равносильны:

а) X — нормальное пространство;

б) для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует такая окрестность O_1F, что $\mathrm{Cl}(O_1F) \subset OF$;

в) любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

10. Докажите, что всякое подпространство T_0 (соответственно T_1, T_2, регулярного) пространства является T_0 (соответственно T_1, T_2, регулярным) пространством.

Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

11. Пусть на множестве X даны топологии $\mathcal{T}_1 \le \mathcal{T}_2$. Если пространство $(X, \mathcal{T}_1)$ хаусдорфово (регулярно, нормально), то что можно сказать об отделимости пространства $(X, \mathcal{T}_2)$?

Если пространство $(X, \mathcal{T}_2)$ хаусдорфово (регулярно, нормально), то что можно сказать об отделимости пространства $(X, \mathcal{T}_1)$?

12. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что функции $f + g$ $((f + g)(x) = f(x) + g(x))$, fg $((fg)(x) = f(x)g(x))$ и $\frac{1}{f}$ $(\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)})$, при условии $f(x) \neq 0$, $x \in X$, непрерывны.

13. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что функции $\max\{f,\ g\}$, $\min\{f,\ g\}$ и $|f| = \max\{f,\ -f\}$ непрерывны.

14. Докажите, что любая непрерывная функция на прямой в топологии Зариского является постоянной.

15. Существует ли непрерывная функция на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающая значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы $y = 1/x$?

Докажите Лемму Урысона, используя теорему Брауэра–Титце–Урысона.

16. *Лемма об ужатии.* Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие нормального пространства X. Докажите, что существует такое открытое покрытие $v = \{V_1, \dots, V_k\}$ пространства X, что $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i,\ i = 1, \dots, k$.

17. *Разбиение единицы.* Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Открытое множество $U_\varphi = \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$ называется *носителем* функции φ и обозначается $\mathrm{supp}(\varphi)$.

Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие X. Семейство непрерывных функций $\varphi_i : X \to [0, 1],\ i = 1, \dots, k$, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* u, если

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{supp}(\varphi_i)) \subset U_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1.$$

Докажите, что для всякого конечного открытого покрытия $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ нормального пространства X существует разбиение единицы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, подчиненное покрытию u.

---

18. Докажите, что в любом конечном T_0-пространстве
а) существует изолированная точка;
б) множество изолированных точек всюду плотно.

19. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

20. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

21. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

22. Существует ли регулярное пространство X, содержащее более двух точек, на котором любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ постоянна?

23. Опишите все непрерывные функции на пространствах из Примера 8.5 Лекции 2.

24. Докажите, что любую равномерно непрерывную функцию на интервале $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ можно продолжить на $\mathbb{R}$.

25. Пусть A — замкнутое подмножество метрического пространства (X, ρ), $f : A \to I$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение

$$g(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) + \frac{\rho(x,a)}{\rho(x,A)} - 1 : a \in A\} & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

является непрерывным продолжением f на X.

Задание N 7

1. Докажите, что в теореме Брауэра–Титце–Урысона продолжение функции определяется неоднозначно. Верно ли, что продолжений функции не менее континуума?

2. В примере 17.8 лекции 4 определен гомеоморфизм g канторова множества на счетную степень дискретного двоеточия $2^{\mathbb{N}}$. В предложении 24.1 лекции 7 определено отображение f произведения $2^{\mathbb{N}}$ на отрезок $I = [0, 1]$.

Докажите, что композиция $f \circ g$ отображений g и f является монотонно возрастающей функцией на канторовом множестве, при которой прообразы двоично-рациональных чисел интервала $(0, 1)$ двухточечны, прообразы остальных точек отрезка I одноточечны.

(*Канторова лестница*) Докажите, что существует единственное продолжение функции $f \circ g : C \to I$ на отрезок I, являющееся монтоннно возрастающей функцией. Нарисуйте ее график.

3. Постройте непрерывное сюръективное отображение отрезка на конечномерный куб I^n, $n \in \mathbb{N}$, гильбетов куб $I^{\aleph_0}$.

4. (*Плоскость Немыцкого*) Базу топологии на полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ образуют открытые шары

$$O_\varepsilon(x, y) \cap \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ \varepsilon > 0,$$

и открытые шары с добавленной точкой касания

$$O_y(x, y) \cup \{(x, 0)\},\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Доказать, что плоскость Немыцкого — тихоновское не нормальное пространство.

5. Подмножество гильбертова пространства ℓ^2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом.*

Докажите, что гильбертов куб в ℓ^2 гомеоморфен гильбертову кубу $I^{\aleph_0}$ (счетная степень отрезка).

---

6. Докажите теорему Дугунджи о продолжении отображений.

Пусть L — локально выпуклое линейное пространство, X — произвольное метрическое пространство, A — его произвольное замкнутое подмножество. Тогда для любого непрерывного отображения $f : A \to L$ существует непрерывное продолжение $F : X \to L$ такое, что $F(X)$ содержится в выпуклой оболочке $f(A)$.

7. Докажите, что тихоновское произведение $\mathbb{R}^A$, где A несчетно, — не нормальное пространство.

8. Дайте прямое доказательство не нормальности квадрата прямой Зоргенфрея (т.е. указать два дизъюнктных замкнутых множества, у которых не существует дизъюнктных окрестностей).

9. Приведите пример тихоновского не регулярного пространства.

10. Постройте непрерывное сюръективное отображение прямой на евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, на пространство $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

Задание N 8

1. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая сходящаяся последовательность точек этого множества в одной метрике, сходится и в другой.

2. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x,y) \leq k_2\rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) \leq k_1\rho_1(x,y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 топологически эквивалентны.

Пусть метрики ρ_1 и ρ_2 на X топологически эквивалентны. Будут ли они удовлетворять условию Задачи 2?

3. Докажите, что топология гильбертова пространства ℓ^2 сильнее топологии на ℓ^2 как на подпространстве тихоновского произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Докажите, что тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — линейное топологическое пространство (т.е. естественно определенные операции сложения и умножения на скаляры непрерывны).

Докажите, что любое подпространство тихоновского произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, содержащее подмножество точек, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля, не нормируемое метризуемое линейное пространство.

5. Докажите компакность пространства, топология которого конечна.

6. Докажите компакность отрезка.

7. Докажите компакность прямой в топологии Зариского.

8. Докажите финальную компакность пространства, являющегося счетным объединением компактных подпространств.

9. Докажите финальную компакность сепарабельного метризуемого пространства.

10. Приведите пример метризуемого не финально компактного пространства.

---

11. Существует ли (бесконечное) метризуемое пространство, любые две метрики на котором удовлетворяют условию Задачи 2.

12. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

13. Приведите пример хаусдорфова финально компактного пространства, которое не паракомпактно.

14. Докажите теорему А. Стоуна. Всякое метризуемое пространство паракомпактно.

15. Докажите, что пространство счетных трансфинитов $T(\omega_1)$ (в топологии линейного порядка) нормальное, не паракомпактное пространство.

Задание N 9

1. *Разбиение единицы.* Докажите, что для всякого конечного открытого покрытия $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ нормального пространства X существует разбиение единицы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, подчиненное покрытию u.

2. Какие топологии на прямой $\mathbb{R}$ из Примера 8.5 Лекции 2 задают компактную топологию?
Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?
Какие подмножества прямой в топологии Зариского являются компактными?
Приведите пример T_1 пространства и его не замкнутого компактного подмножества.

3. Пусть X — линейно упорядоченное пространство в топологии линейного порядка. Докажите, что любой отрезок X компактен в том и только том случае, если любое ограниченное подмножество X имеет точную верхнюю грань в X.

4. Докажите, что лексикографически упорядоченный квадрат компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, и не сепарабелен.

Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, сепарабельно и не удовлетворяет второй аксиоме счетности (следовательно не метризуемо).

5. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности.

6. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{T}_1$ и компактная $\mathcal{T}_2$ топологии. Покажите, что если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
Покажите, что любые две хаусдорфовы, компактные топологии на множестве X или совпадают, или не сравнимы.

7 *"Лемма о трубке".* Пусть в произведении $X \times Y$ сомножитель Y компактен. Докажите, что для любой окрестности O "слоя" $\{x\} \times Y$, где x произвольная точка X, существует окрестность Ox точки x такая, что $Ox \times Y \subset O$.
Приведите пример, показывающий, что требование компактности сомножителя Y существенно.
Докажите Первую Теорему Тихонова в случае конечного числа сомножителей, используя "Лемму о трубке".

8. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

9. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств X, U — окрестность $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Докажите, что тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

10. Докажите, что в хаусдорфовом компактном пространстве объединение счетного числа замкнутых подмножеств, внутренность которых пуста, имеет пустую внутренность.

11. Какие из подмножеств пространства матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

12. Приведите пример метрического пространства и его замкнутого, ограниченного, не компактного подмножества.

13. Докажите, что для любых компактных подмножеств A и B метрического пространства (X, ρ) существуют точки $a \in A$, $b \in B$ такие, что $\rho(a, b) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

14. Будет ли компактификация X интервала $(0, 1)$ из пункта 3 Примера 31.2 Лекции 9 эквивалентна компактификации $X' \subset \mathbb{R}^2$, являющейся объединением вертикального отрезка $X_1 = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ и графика X'_2 функции $y = \sin \frac{1}{1-x}$; $0 \leq x < 1$ (вложение $t \to (1 - t, \sin \frac{1}{1-t})$)?

15. (*Вторая Теорема Тихонова*). *Весом топологического пространства* называется наименьшая из мощностей его баз. Докажите, что тихоновское пространство X имеет компактификацию bX, вес которой равен весу X.

---

16 *"Компактный еж".* Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0, 1]$, который обозначим через $[0, 1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0, 1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим топологию: на полуинтервалах $(0, 1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ — обычная интервальная топология, базисными окрестностями

$\{0\}$ являются всевозможные конечные объединения полуинтервалов $[0, a(\lambda))_\lambda, 0 < a(\lambda), \lambda \in \Lambda_{Fin} \subset \Lambda$, и всех отрезков $[0,1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{Fin}$. Показать, что топология корректно задана, компактный еж — компактен.

"Еж". Пусть Λ бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$. На сумме $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}[0,1]_\lambda$ определим разбиение $\mathcal{R}$ на одноточечные подмножества $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}(0,1]_\lambda$ и множество $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}\{0\}_\lambda$. Факторпространство суммы $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}[0,1]_\lambda$ по разбиению $\mathcal{R}$ назовем "ежом".

Докажите, что "еж", "компактный еж" и "метризуемый еж" (Задача 21 Задания 2) попарно не гомеоморфны.

17. Докажите, что непустое хаусдорфово компактное пространство X без изолированных точек несчетно.
Докажите, что $|X| \geq \mathfrak{c}$.

18. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию).

19. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в компактное пространство Y продолжается до отображения его Стоун-Чеховской компактификации βX.

Установите единственность (с точностью до эквивалентности) Стоун-Чеховской компактификации βX тихоновского пространства X.

20. Для компактификаций (Y_1, i_1) и (Y_2, i_2) считаем $Y_1 \leq Y_2$, если существует отображение $f : Y_2 \to Y_1$ такое, что $f \circ i_2 = i_1$. Докажите, что $f(Y_2 \setminus i_2(X)) = (Y_1 \setminus i_2(X))$.

Докажите, что $\leq$ — упорядочение на множестве компактификаций, для которой βX — наибольший элемент.

Задание N 10

1. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в компактное пространство Y продолжается до отображения его Стоун-Чеховской компактификации βX.

Установить единственность (с точностью до эквивалентности) Стоун-Чеховской компактификации βX тихоновского пространства X.

2. Приведите пример тихоновского пространства, не имеющего метризуемой компактификации.

3. Докажите. а) Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, являются локально компактными пространствами.

б) Открытое (замкнутое) подмножество локально компактного пространства локально компактно.

в) Прямая в топологии Зариского — компактное, не локально компактное пространство.

г) Хаусдорфово компактное пространство локально компактно.

4. Докажите, что $\mathbb{Q}$ не локально компактное пространство.

5. В каких из топологий из Примера 8.5 Лекции 2 прямая локально компактна?

6. Докажите, что одноточечная компактификация Александрова $\mathbb{R}^n$ — сфера S^n, $n \in \mathbb{N}$.

7. Докажите, что одноточечная компактификация Александрова счетного дискретного пространства $\mathbb{N}$ — сходящаяся последовательность $\{0\} \cup (\frac{1}{n})$.

8. Докажите, что гомеоморфизм тихоновских пространств, продолжается до гомеоморфизма их Стоун-Чеховских компактификаций.

Докажите, что гомеоморфизм хаусдорфовых локально компактных пространств, продолжается до гомеоморфизма их одноточечных компактификаций Александрова.

9. Будет ли непрерывный хаусдорфов образ локально компактного пространства локально компактным?

10. Докажите, что любое некомпактное метризуемое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подпространство.

11. Докажите, что на любом некомпактном метризуемом пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

---

12. Для компактификаций (Y_1, i_1) и (Y_2, i_2) считаем $Y_1 \leq Y_2$, если существует отображение $f : Y_2 \to Y_1$ такое, что $f \circ i_2 = i_1$. Докажите, что $f(Y_2 \setminus i_2(X)) = (Y_1 \setminus i_2(X))$.

Докажите, что $\leq$ — упорядочение на множестве компактификаций, для которой βX — наибольший элемент. Если пространство X локально компактно, то αX — наименьший элемент.

13. Докажите, что хаусдорфово пространство локально компактно в том и только том случае, если оно является открытым подмножеством любой своей компактификации.

14 (*Альтернативное определение локальной компактности пространства*). *Пространство X называется локально компактным, если для произвольной точки x существует такая ее окрестность Ux, что* $\mathrm{Cl}(Ux)$ *является компактным подпространством X.*

Будут ли локально компактными открытое (замкнутое) подмножество локально компактного пространства в этом смысле?

Будет ли локально компактным в этом смысле прямая в топологии Зариского?

Докажите, что для хаусдорфовых пространств оба понятия локальной компактности совпадают.

15. Докажите, что любое компактное пространство псевдокомпактно.
Докажите, что множество $T(\omega_1)$ счетных трансфинитов (Пример 7.1 Лекции 1) является локально компактным, не компактным хаусдорфовым пространством, которое псевдокомпактно и секвенциально компактно.

Докажите, что $\beta T(\omega_1) = \alpha T(\omega_1) = T = T(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$.

Задание N 11

1. Докажите, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_1(x, y) < \delta_1$, и $\rho_1(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_2(x, y) < \delta_2$.

2. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^n$ в любой из метрик Примера 34.2.1 полны.

3. Приведите пример множества и топологически эквивалентных метрик на нем таких, что одна метрика полна, а другая не полна.

Докажите, что на локально компактном, не компактном метризуемом пространстве существуют полная метрика и не полная матрика.

4. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Докажите, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2\rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 топологически эквивалентны. Кроме того, если одна из метрик полна (вполне ограничена), то и другая метрика полна (вполне ограничена).

5. Докажите, что гильбертово пространство ℓ^2 полно.

6. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) полно в том и только том случае, если любая убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ пространства X таких, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} A_n = 0$, имеет непустое пересечение.

Докажите, что не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных множеств полного метрического пространства всюду плотно.

7. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Докажите, что $(Y, \rho|_Y)$ — полное метрическое пространство в том и только том случае, если Y замкнуто в X.

8. Метрическое пространство (X, ρ) является полным (вполне ограниченным) в том и только том случае, если (X, ρ') полно (вполне ограничено), где $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y),\ 1\}$.

9. Докажите, что на счетном произведении полных (вполне ограниченных) метрических пространств существует полная (вполне ограниченная) метрика.

10. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Докажите, что Y метризуемо полной метрикой в том и только том случае, если Y является *G_δ-подмножеством* X (т.е. Y является пересечением счетного числа открытых в X множеств).

Докажите, что на пространстве иррациональных чисел существует полная метрика.

11. Докажите, что на пространстве рациональных чисел любая метрика не является полной.

12. (*Принцип сжимающих отображений Банаха.*) Отображение $f : X \to X$ метрического пространства называется *сжимающим*, если существует $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y))) < \alpha\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Докажите, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку (т.е. точку, отображающуюся в себя).

13. Докажите, что подмножество Y метрического пространства (X, ρ) вполне ограничено в том и только том случае, если из любой бесконечной последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

14 (*Критерий компактности в ℓ^2*). Подмножество X в ℓ^2 компактно в том и только том случае, если оно замкнуто, ограничено и выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty} (\sup_{\mathbf{x}\in X} \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2) = 0.$$

Докажите, что подмножество $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq 1\}$, где $a_n > 0$, $a_n \to +\infty$ компактно.

---

15. Проверьте выполнение следующего утверждения. Для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: существуют числа k_1 и k_2 такие, что для любых точек $x, y \in X$

$$k_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq k_2\rho_1(x, y).$$

16. Докажите, что любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена в том и только том случае, если пространство компактно.

Задание N 12

1. Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что на подмножестве $B(X, Y)$ произведения Y^X корректно определена метрика

$$d(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

и $d'(f, g) = \min\{d(f, g), 1\}$, где d' — равномерная метрика на Y^X. (Если $Y = \mathbb{R}$, то метрика d порождается нормой $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ на линейном пространстве $B(X)$.)

2. Будет ли множество

$$U(f, \epsilon) = \{h \in \mathbb{R}^X : \rho(f(x), h(x)) < \epsilon, x \in X\}$$

открыто в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{R}^X$.

Докажите, что для ε-окрестности $O_\varepsilon(f)$ точки f в равномерной метрике выполнено

$$O_\varepsilon(f) = \bigcup_{\delta < \epsilon} U(f,\ \delta).$$

3. Какие из необходимых и достаточных условий верны в следующих утверждениях:

(a) отображения f_α семейства отображений $\{f_\alpha : X \to Y : \alpha \in \mathcal{A}\}$, где Y метрическое пространство, непрерывны тогда и только тогда, когда диагональное произведений отображений f_α в Y^X в топологии равномерной сходимости непрерывно;

(b) отображения f_α семейства отображений $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y : \alpha \in \mathcal{A}\}$, где Y метрическое пространство, непрерывны тогда и только тогда, когда произведение отображений $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha$ тихоновского произведения $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ в Y^X в топологии равномерной сходимости непрерывно.

4. Будет ли произведение $\mathbb{R}^X$ в топологии равномерной сходимости линейным топологическим пространством (т.е. естественно определенные операции сложения и умножения на скаляры непрерывны)?

5. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ в топологии равномерной сходимости не удовлетворяет второй аксиоме счетности и не сепарабельно.

6. Докажите, что множество $C([0,1], \mathbb{R})$ не замкнуто в тихоновском произведении $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

7. В какой из топологий на множестве $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ последовательность функций $f_n = \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, является сходящейся?

8. Семейство непрерывных функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется *равностепенно непрерывным в точке* x, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ для любых $f \in \mathcal{F}$, $t \in O_\delta(x)$. Семейство $\mathcal{F} \subset C(X)$, равностепенно непрерывное во всех точках X, называется *равностепенно непрерывным*.

Докажите, что любое конечное подсемейство $\mathcal{F} \subset C(X)$ равностепенно непрерывно.

Докажите, что любая равномерно сходящаяся последовательность функций $f_n \in C(X)$ является равностепенно непрерывным семейством.

Будет ли равностепенно непрерывным семейством последовательность функций $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$?

9. Какие из семейств отображений $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(a) $\{f_n = x + \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{f_n = n + \sin(x) : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\{f_n = x^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $\{f_n = n \sin(\frac{x}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

являются равностепенно непрерывными?

10. (*Теорема Асколи для отображений в* $\mathbb{R}$) Пусть K — метризуемое компактное пространство, пространство $C(K)$ с топологией равномерной сходимости. Докажите, что подмножество $\mathcal{F} \subset C(K)$ компактно в том и только том случае, когда оно замкнуто, равностепенно непрерывно и ограничено.

11. (*Теорема Арцела для отображений в* $\mathbb{R}$) Пусть K — метризуемое компактное пространство, пространство $C(K)$ с топологией равномерной сходимости, $f_n \in C(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Если последовательность (f_n) является равностепенно непрерывным семейством и для любой точки $x \in K$ множество $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, то у последовательности (f_n) есть сходящаяся подпоследовательность.

12. Пусть последовательность функций $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ на компактном пространстве X сходится в топологии поточечной сходимости к функции f. Докажите, что если семейство f_n, $n \in \mathbb{N}$, равностепенно непрерывно, то f непрерывно, и f_n сходится к f в топологии равномерной сходимости.

13. Докажите единственность пополнения метрического пространства (с точностью до изометрий).

14. Найдите пополнение $\mathbb{R}$ с метриками $\rho_\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
a) $\rho_1(x, y) = |e^x - e^y|$;
b) $\rho_2(x, y) = |\mathrm{arctg}(x) - \mathrm{arctg}(y)|$.

15. Найдите пополнения рациональных и иррациональных чисел с обычной метрикой.

16. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ не изометрично $\mathbb{R}^m$ (с евклидовыми метриками) при $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

17. Докажите, что семейство $\mathcal{P}$ полиномиальных функций на тихоновском кубе $I^{\mathcal{A}}$
(a) разделяет точки, т.е. если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует $f \in \mathcal{P}$ такая, что $f(x) \neq f(y)$,
(b) содержит все постоянные функции и является кольцом функций, т.е. для любых $f, g \in \mathcal{P}$ имеем $fg \in \mathcal{P}$ и $f + g \in \mathcal{P}$.
(c) замыкание $\overline{\mathcal{P}}$ множества полиномиальных функций $\mathcal{P}$ в пространстве $C^*(I^{\mathcal{A}})$ в топологии равномерной сходимости является кольцом функций.

---

18. Будет ли произведение $\mathbb{R}^X$ в топологии равномерной сходимости нормированным (евклидовым) топологическим пространством (т.е.топология задается нормой, скалярным произведением)?

19. Существует ли метрика на пространстве рациональных (иррациональных) чисел, пополнением по которой является евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

20. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) может быть изометрично вложено в гильбертово пространство ℓ^2.

21. Для всякой ли изометрии f гильбертова пространства ℓ^2 существует неподвижная точка отображения f?

Задание N 13

1. Докажите, что если $f \in C(X \times Y, Z)$, то $F : X \to C(Y, Z)$ (см. пункт 42.1 Лекции 13) непрерывно, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией поточечной сходимости. Привести пример, когда отображение $f \in C(X \times Y, Z)$, определяемое непрерывным отображением $F : X \to C(Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией поточечной сходимости, не является непрерывным.

2. Докажите, что если отображение $F : X \to C(Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией равномерной сходимости, непрерывно, то отображение $f \in C(X \times Y, Z)$ (см. пункт 42.1 Лекции 13) непрерывно. Привести пример, когда отображение $F : X \to C(Y, Z)$, определяемое непрерывным отображением $f \in C(X \times Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией равномерной сходимости, не является непрерывным.

3. Докажите, что отображение
$\circ : C(X, Y) \times C(Y, Z) \to C(X, Z)$, $\circ(f, g) = g \circ f$
пространств отображений в компактно-открытых топологиях, непрерывно.

4. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ связен.

5. Пусть $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ — топологии на X. Что можно сказать о связности X в одной топологии, если X связно в другой топологии?

6. Докажите, что объединение семейства попарно пересекающихся связных подмножеств связно.

7. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — связные множества. Верно ли, что A и B — связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

8. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ связно?

9. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ связно.

10. Будет ли внутренность связного множества связна? Будет ли граница связного множества связна? Будет ли множество связно, если его граница связна?

11. Пусть $A \subset X$. Докажите, что если C связное подпространство X, пересекающее как A, так и $X \setminus A$, то $C \cap \mathrm{Bd} A \neq \varnothing$.

12. Пусть A и B собственные подмножества связных пространств X и Y соответственно (т.е. $A \neq X$, $B \neq Y$). Докажите, что $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ связно.

13. Будет ли прообраз при непрерывном отображении связного множества связен, если прообраз любой точки связен?

14. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства. Существует ли счетное хаусдорфово связное пространство?

15. Какие из следующих пространств
$\mathbb{N} \times [0, 1)$, $[0, 1) \times \mathbb{N}$, $[0, 1) \times [0, 1]$, $[0, 1] \times [0, 1)$
с топологиями, порожденными лексикографическим порядком на произведениях, будут связными?

16. Докажите связность пространств $\mathbb{R}^n$, сфер S^n и замкнутых шаров B^n, $n \in \mathbb{N}$.

17. Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, не гомеоморфны.
Докажите, что $[0, 1]$, $[0, 1)$ и $(0, 1)$ попарно не гомеоморфны.

18. Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность. Докажите, что компоненты связности локально связного пространства открыто-замкнуты.

19. Найдите компоненты связности следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$;

(c) $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?

20. Докажите, что отображение
$\Lambda : C(X \times Y, Z) \to C\big(X, C(Y, Z)\big)$,
пространств отображений в компактно-открытых топологиях, определяемое условием $\Lambda(f) = F$ (см. пункт 42.1 Лекции 13), непрерывно для любых X, Y, Z. Если же Y хаусдорфово и локально компактно, то это отображение является гомеоморфизмом.

21. Докажите связность линейно упорядоченного пространства X такого, что:
1) любое ограниченное подмножество X имеет точную верхнюю грань в X;
2) если $x < y$, то существует $z \in X$, $x < z < y$.

22. Докажите, что не существует непрерывной биекции прямой на квадрат.

23. Докажите, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в топологии равномерной сходимости несвязно?

24. Верно ли утверждение, что функция на отрезке непрерывна в том и только том случае, если образ любого отрезка отрезок?

25. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существует единственная прямая, параллельная фиксированной прямой l, которая делит A на два множества равной площади.

Докажите, что если A и B — открытые связные ограниченные множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из множеств A и B на два множества равной площади.

Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят A на четыре множества равной площади.

26. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка x такая, что $f(x) = f(-x)$.

27. Докажите, что пространство гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ в компактно-открытой топологии имеет две компоненты связности.

Задание N 14

1. Докажите, что вполне несвязное пространство является T_1-пространством.

2. Докажите, что нульмерное пространство вполне несвязно.

3. Докажите, что подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ нульмерны.

4. Докажите, что прямая Зоргенфрея нульмерна.

4. Докажите, что тихоновское произведение нульмерных (соответственно вполне несвязных) пространств нульмерно (соответственно вполне несвязно).

5. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — линейно связные множества. Верно ли, что A и B — линейно связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

6. Будет ли внутренность линейно связного множества связна? Будет ли граница линейно связного множества связна? Будет ли множество линейно связно, если его граница линейно связна?

7. Какие из следующих пространств
$\mathbb{N} \times [0,1)$, $[0,1) \times \mathbb{N}$, $[0,1) \times [0,1]$, $[0,1] \times [0,1)$
с топологиями, порожденными лексикографическим порядком на произведениях, будут линейно связными?

8. Докажите линейную связность пространств $\mathbb{R}^n$, сфер S^n и замкнутых шаров B^n, $n \in \mathbb{N}$.

9. Найдите компоненты линейной связности следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$;

(c) $\mathrm{Symm}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?

10. Докажите, что для подмножеств прямой связность и линейная связность эквивалентны.
Докажите, что открытое связное подмножество $\mathbb{R}^2$ линейно связно.

11. Пусть A — счетное подмножество $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus A$ линейно связно.

12. Докажите, что $\pi(X,V)$ одноточечно для любого выпуклого подмножества V в $\mathbb{R}^n$.

13. Установите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Докажите, что если X одноточечное пространство, то множество $\pi(X,Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства Y.

15. Когда гомотопны два постоянных отображения?

16. Пусть X — линейно связное пространство. Докажите, что $\pi(I,X)$ одноточечно.

17. Докажите, что если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то $\pi(X,Y)$ — компонентны линейной связности пространства $C(X,Y)$ в компактно-открытой топологии.

18. Докажите, что если отображения $f, f' : X \to Y$ гомотопны и отображения $g, g' : Y \to Z$ гомотопны, то тогда отображения $g \circ f$ и $g' \circ f'$ гомотопны.

19. Докажите, что непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $p_Y \circ f$, $p_Y \circ g$ и $p_Z \circ f$, $p_Z \circ g$, где p_Y и p_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

---

20. Докажите, что пространство *веер Кнастера-Куратовского* $\mathcal{K}$ (Пример 37.4 Лекции 14) связно, подпространство $\mathcal{K} \setminus \{a\}$ является вполне несвязным, но не нульмерным пространством.

21. Докажите, что множество точек гильбертова пространства ℓ^2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не нульмерно.

22. Докажите, что факторпространство хаусдорфова компактного пространства по его разбиению на компоненты связности является нульмерным хаусдорфовым компактным пространством.

23. Пусть X_1 и X_2 — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта X из Примера 31.2.3 Лекции 9. Докажите, что если при непрерывном отображении $f : X \to X$ существует точка $x \in X_2$, для которой $f(x) \in X_1$, то и $f(X) \subset X_1$.

24. Будут ли гомотопны любые два непрерывных отображения произвольного пространства X в линейно связное пространство?

25. Приведите пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, f и g гомотопны, но не A-гомотопны.

Задание N 15

1. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

2. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

3. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и кольца $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(2) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(3) окружности S^1 и пространства $\mathbb{R}^3$ с выкинутой прямой;

(4) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

4. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) плоскости с двумя выкинутыми точками и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$;

(2) тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$;

(3) сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$;

(4) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(5) пространств невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

5. Докажите, что букет двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$ гомотопически эквивалентен объединению окружности и ее произвольного диаметра.

6. Докажите, что отношение гомотопности путей является отношением эквивалентности.

7. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

8. Докажите, что пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет гомотопический тип точки.

9. Докажите, что выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ стягиваемо.
Пусть X — пространство. Произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I называется *цилиндром* пространства X. Если отождествить между собой все точки верхнего основания $X \times \{1\}$ цилиндра $X \times I$ (стянуть $X \times \{1\}$ в точку), то получится *конус* $\mathrm{Con}(X)$ *над* X. Докажите, что конус $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

10. Вычислите фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(2) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

---

11. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

12. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

13. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

14. Докажите, что бесконечномерная сфера $S^\infty = \{x \in \ell^2 : \sum |x_i|^2 = 1\}$ стягиваема.

15. Докажите, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X, Y)$ тривиально (т.е. состоит из одного элемента) для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y, X)$ тривиально для любого пространства Y.

16. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножителей?

17. Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.
Докажите, что ретракт (см. Задачу 20 Задания 5) стягиваемого пространства стягиваем.

Задание N 16

1. Пусть путь α соединяет точки x_0 и x_1, путь γ соединяет точки x_1 и x_2. Докажите, что $(\alpha\gamma)_\# = \gamma_\#\alpha_\#$.

2. Докажите, если $\alpha \sim \gamma$, то $\alpha_\# = \gamma_\#$.

3. Вычислить фундаментальную группу:

(1) S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

(2) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что если $f : X \to Y$ продолжается до отображения $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to Y$, то гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ тривиален.

5. Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно, точки x_0 и x_1 соединены путем α, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$. Тогда

$$(f \circ \alpha)_\# \circ (f_{x_0})_* = (f_{x_1})_* \circ \alpha_\#.$$

6. Пусть $r : X \to A$ — ретракция, $a \in A$.
Докажите сюръективность гомоморфизма

$$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a).$$

Докажите для вложения $i : A \to X$ инъективность гомоморфизма

$$i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a).$$

7. Докажите , что $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ — накрытие.

8. Докажите, что естественная проекция S^n на $\mathbb{R}P^n$ — накрытие, $n \in \mathbb{N}$.

9. Пусть $p : X \to B$ — накрытие.
Докажите, что если база B — хаусдорфово (соответственно регулярное, тихоновское, локально компактное хаусдорфово) пространство, то и X хаусдорфово (соответственно регулярное, тихоновское, локально компактное хаусдорфово) пространство.
Если база компактна, и $p^{-1}(b)$ конечно для любой точки $b \in B$, то X — компактное пространство.

10 (*Теорема Брауэра о неподвижной точке.*) Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого диска B^2 в себя имеет неподвижную точку.

11. Докажите, что при любом гомеоморфизме B^2 точки из границы S^1 отображаются в точки из границы.

12. Пусть $f : S^1 \to X$ — непрерывное отображение. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(a) f гомотопно нулю;

(b) f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : B^2 \to X$;

(c) f_* — тривиальный гомоморфизм.

13. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для любого $n \neq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Вычислите фундаментальные группы проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

---

15. Докажите, что изоморфизм $\alpha_\#$, определяемый путем α с началом x_0 и концом x_1, не зависит от выбора пути с началом x_0 и концом x_1 в том и только том случае, если фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

16. Докажите, что линейно связное пространство, являющееся объединением двух открытых односвязных множеств, пересечение которых линейно связно, является односвязным.

17. Пусть множества U и V открыты в X. Докажите, что если множества $U \cap V$ и $U \cup V$ односвязны, то и множества U и V односвязны.

18. Будет ли односвязен букет $S^2 \vee S^2$? Будет ли односвязен букет односвязных пространств?

19. Привести пример односвязного не стягиваемого пространства.

20. Построить накрытие:

(a) ленты Мебиуса цилиндром;

(b) бутылки Клейна тором;

(c) бутылки Клейна плоскостью;

(d) бутылки Клейна цилиндром.

21. Докажите, что если $p : X \to B$ — накрытие, $B_0 \subset B$, то тогда для $X_0 = p^{-1}(B_0)$ $p|_{X_0} : X_0 \to B_0$ накрытие.

22. Докажите, что если линейно связное пространство B имеет неоднолистное линейно связное накрытие, то оно неодносвязно.

23. Докажите, что любое накрытие $p : X \to B$ с односвязной базой и линейно связным накрывающим пространством является гомеоморфизмом.

24. Пусть $p : X \to B$ — накрытие, и $p(x_0) = b_0$. Тогда
(a) $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ — мономорфизм;
(b) для группы $H = p_*(\pi_1(X, x_0))$ соответствие поднятия

$$p_\star : \pi_1(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0)$$

является инъективным. Если X линейно связно, то $p_\star$ — биекция.
(c) если φ петля в B, то тогда $[\varphi] \in H$ в том и только том случае, если φ поднимается до петли в X.

25. Пусть $p : X \to B$ и $p' : X' \to B'$ — накрытия. Докажите, что $p \times p' : X \times X' \to B \times B'$ накрытие.

26. Для накрытия $p \times \mathrm{id} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\oplus) \to S^1 \times \mathbb{R}_\oplus$ (плоскости с выколотой точкой) найдите путь, являющийся поднятием пути:

(a) $\varphi(t) = (2 - t, 0)$;

(b) $\psi(t) = ((1 + t)\cos(2\pi t), (1 + t)\sin(2\pi t))$;

(c) $\chi(t) = \varphi\psi(t)$.

27. Для накрытия $p \times p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ тора найдите путь, являющийся поднятием пути:

$$\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \times (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)).$$

28. Докажите, что гомотопное нулю отображение $f : S^1 \to S^1$ имеет неподвижную точку ($f(x) = x$) и точку, отображующуся в *антиподальную* (т.е. $f(x) = -x$).

Пусть $f : S^1 \to S^1$ такое непрерывное отображение, что $f(-t) = -f(t)$ для любой точки $t \in S^1$. Докажите, что f гомотопно нулю.

29. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^1$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

30. Докажите:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Вычислите фундаментальную группу: тора T^2; полнотория $S^1 \times B^2$; $S^1 \times S^2$; цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$.

31. Вычислить фундаментальную группу: букета окружностей $S^1 \vee S^1$; букета сфер $S^2 \vee S^2$; тора T^2 с выколотой точкой.