НЕКОТОРЫЕ ОТЛИЧИЯ
лекций Б.А.Пасынкова от лекций В.В.Федорчука (обозначаемых через [Ф])
по курсу "Введение в топологию"

КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО (см. лекцию 1 из [Ф])

1.6 Канторово множество. (Следующий текст надо читать после абзаца страницы 8 лекций Федорчука, кончающегося словами "*канторовым дисконтинуумом*".)

Отметим, что

1. разные отрезки ранга n не пересекаются и поэтому любая точка $x \in C$ принадлежит ровно одному из них;

2. отрезок $n+1$-го ранга $I_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$ содержится в отрезке n-го ранга $I_{j_1 \dots j_n}$ тогда и только тогда, когда $i_k = j_k$ для $k = 1, \dots, n$.

Следовательно, для любой точки $x \in C$ однозначно определена такая последовательность нулей и единиц $i(x) = (i_1, \dots, i_n, \dots)$, что $x \in I_{i_1 \dots i_n}$ для всех n. Так как расстояние между разными точками x и x' из C положительно, а длина отрезков ранга n стремится к нулю при $n \to \infty$, то x и x' лежат в разных отрезках ранга n, начиная с некоторого номера. Поэтому $i(x) \neq i(x')$. Наконец, если $s = (i_1, \dots, i_n, \dots)$, $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность нулей и единиц, то $I_{i_1 \dots i_n}$, $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю. Очевидно, единственная точка x, лежащая в пересечении этих отрезков, принадлежит C и $i(x) = s$. Взаимная однозначность отображения i канторова множества C на множество S всех последовательностей из нулей и единиц доказана.

Определим отображение $t : S \to I$, считая образом последовательности $s = (i_1, \dots, i_n, \dots) \in S$ число $t(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n} \in I$. Так как любое число отрезка I может быть записано в виде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}$, то t есть отображение "на"(сюръективно). Поэтому и $(f = t \circ s) : C \to I$ есть отображение "на".

Покажем, что функция $f : C \to I$ непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ существует номер $n(\varepsilon)$, такой, что его остаток $\sum_{n(\varepsilon)+1}$, начинающийся с номера $n(\varepsilon)+1$, меньше ε. Возьмем $\delta < \frac{1}{3^{n(\varepsilon)}}$. Если $x, x' \in C$ и $\rho(x, x') < \delta$, то (так как между любыми двумя разными отрезками ранга $n(\varepsilon)$ лежит хотя бы один интервал длины $\geq \frac{1}{3^{n(\varepsilon)}}$) точки x и x' лежат в некотором отрезке ранга $n(\varepsilon)$. Поэтому первые $n(\varepsilon)$ членов последовательностей $s(x)$ и $s(x')$ совпадают и $|f(x) - f(x')| \leq \sum_{n(\varepsilon)+1} < \varepsilon$. Непрерывность (даже равномерная) отображения f доказана. Итак, верно следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Отрезок I яляется непрерывным образом канторова множества ($\equiv C$ можно непрерывно отобразить на I).*

Из сюръективности t, а значит и f, следует, что I равномощно подмножеству множества C. Так как $C \subset I$, то C равномощно подмножеству множества I. По теореме Кантора - Бернштейна, C и I равномощны.

Следствие 1.1. *Канторово множество имеет мощность континуума.*

Замечание 1.1. Все интервалы $J_{i_1 \dots i_n}$ любых рангов n будем называть *смежными* к C. Нетрудно установить, что

1. функция f монотонно возрастает и $f(x) = f(x')$ для точек $x, x' \in C$ тогда и только тогда, когда эти точки являются концами какого-нибудь смежного к C

интервала;

2. функция $c : I \to I$, равная f на C и для каждого смежного к C интервала равная значениям f в концах этого интервала, непрерывна и монотонно возрастает.

Функция c называется канторовой (а иногда – чертовой) лестницей (роль ступенек играют графики ограничений c на смежные к C интервалы и их концы). Эта функция почти всюду имеет нулевую производную, но не постоянна.

ТИХОНОВСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ (см. пункт 7.3 лекции 7 в [Ф])

Декартовым ($\equiv$ теоретико-множественным) *произведением* $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ множеств X_α (называемых *сомножителями*) называется множество всех таких отображений $x : \mathcal{A} \to \cup\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$ для всех α. В дальнейшем эти отображения x будут называться *точками произведения* X, их значения $x(\alpha)$ будут обозначаться через x_α и называться *координатами* точек x, а вместо $x : \mathcal{A} \to \cup\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ будем писать $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Отображение $p_\alpha : X \to X_\alpha$, ставящее в соответствие точке x ее (α-ую) координату x_α, называется (α-ой) проекцией произведения X на сомножитель X_α.

Если все X_α – пространства, то на произведении X можно ввести следующую топологию, называемую *тихоновской*. Предбаза этой топологии (которую мы также будем называть *тихоновской*) состоит из всевозможных множеств вида $(p_\alpha)^{-1}O$, где O открыто в X_α и $\alpha \in \mathcal{A}$, а всевозможные конечные пересечения элементов этой предбазы обазуют базу (ее мы тоже будем называть *тихоновской*) тихоновской топологии. Наконец, декартово произведение X с тихоновской топологией на нем называется *тихоновским произведением пространств* X_α.

(Если все множества (пространства) $_\alpha$ являются экземплярами одного и того же множества (пространства) X, то произведение $\prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ будем называть *декартовой (тихоновской)* степенью множества (пространства) X и обозначать символом $X^{\mathcal{A}}$ или X^λ, где $\lambda = |\mathcal{A}|$.)

Если множество $\mathcal{A}$ конечно, то описанные произведения пространств называют, просто, топологическими (они рассматривались еще до возникновения тихоновских произведений).

Очевидно,

проекции тихоновских произведений на сомножители непрерывны.

Пусть дана система μ отображений множеств $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда отображение $f : X \to (Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\})$, такое, что $fx = (f_\alpha x)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $x \in X$, называется *диагональным произведением* (системы μ) всех отображений $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ и обозначается символом ($\Delta\mu$) $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Если q_α – α-ая проекция произведения Y, то, очевидно,

$$q_\alpha \circ f = f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Если все отображения f_α непрерывны, то непрерывно и их диагональное произведение f.

Действительно, возьмем какой-нибудь элемент $(q_\alpha)^{-1}O$ тихоновской предбазы в произведении Y (и значит O открыто в Y_α). Тогда прообраз (см. (1)) $f^{-1}((q_\alpha)^{-1}O) = (f_\alpha)^{-1}O$ открыт в X. Непрерывность f доказана.

Кратко доказанное утверждение можно сформулировать так:

диагональное произведение непрерывных отображений непрерывно.

Пусть теперь даны декартовы произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\})$ и $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\})$ с проекциями $p_\alpha : X \to X_\alpha$ и $q_\alpha : Y \to Y_\alpha$, соответственно. Пусть еще даны отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда отображение $f : X \to Y$, такое, что $fx = (f_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $x \in X$, называется *произведением* (системы μ) всех отображений f_α и обозначается символом $(\prod \mu)$ $\prod\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Очевидно,

$$q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Легко усматривается также, что

$$\prod\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} = \Delta\{f_\alpha \circ p_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Если все f_α непрерывны, то непрерывны и все $f_\alpha \circ p_\alpha$. Так как диагональные произведения непрерывных отображений непрерывны, то из только что выписанного равенства следует, что

произведение непрерывных отображений непрерывно.

Очевидно,

произведение гомеоморфизмов – гомеоморфизм.

Пусть дано декартово произведение $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ (с проекциями $q_\alpha : Y \to Y_\alpha$) и для каждого α в Y_α выбрано подмножество X_α. Тогда декартово произведение $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\})$ (с проекциями $p_\alpha : X \to X_\alpha$) называется *декартовым подпроизведением* произведения Y. Очевидно, $X \subset Y$, $X = \cap\{(q_\alpha)^{-1}X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $p_\alpha x = q_\alpha x$ для любой точки $x \in X$. Также очевидно, что

(∗∗) *для $S \subset X_\alpha$ и $S' \subset Y_\alpha$, таких, что $S = X \cap S'$, выполняется соотношение*

$$X \cap (q_\alpha)^{-1}S' = (p_\alpha)^{-1}S,\ \alpha \in \mathcal{A}.$$

Пусть все Y_α – пространства. Тихоновскую топологию на произведении Y обозначим через τ_Y, тихоновскую топологию на произведении X подпространств X_α пространств Y_α обозначим через τ_X.

Докажем, что

$$\tau_X = \tau_Y|_X,$$

т.е.

(П) *декартово подпроизведение тихоновского произведения как подпространство этого тихоновского произведения само является тихоновским произведением своих сомножителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$. Возьмем открытое в X_α множество O и открытое в Y_α множество O' так, что $O = O' \cap X_\alpha$. Тогда (см. (∗∗)) $X \cap (q_\alpha)^{-1}O' = (p_\alpha)^{-1}O$. Отсюда следует, что система пересечений всех элементов тихоновской предбазы произведения Y, являясь предбазой подпространства X пространства Y, является также тихоновской предбазой произведения X. □

Следующее утверждение иллюстрирует важность понятия топологического произведения. Из определения $\mathbb{R}^n$ следует, что как множество оно является декартовым произведением n экземпляров $\mathbb{R}_i$, $i = 1, \ldots, n$, числовой прямой $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *$\mathbb{R}^n$ как декартово произведение n экземпляров $\mathbb{R}_i$, $i = 1, \ldots, n$, прямой $\mathbb{R}$, снабженная топологией τ_ρ, порожденной евклидовой метрикой ρ на $\mathbb{R}^n$, есть топологическое произведение n экземпляров $\mathbb{R}_i$ пространства $\mathbb{R}$ (следовательно, $\mathbb{R}^n$ есть n-ая топологическая степень числовой прямой $\mathbb{R}$).*

Доказательство. Надо доказать, что τ_ρ, совпадает с топологией τ топологического произведения прямых $\mathbb{R}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Возьмем открытое в $\mathbb{R}_i$ множество U, $O = (p_i)^{-1}U$ (p_i – проекция произведения $\mathbb{R}^n$ на сомножитель $\mathbb{R}_i$) и точку $x = (x_j)_{j=1,\ldots,n} \in O$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = O_\varepsilon x_i \subset U$. Если $y \in O_\varepsilon x$, то $|y_i - x_i| \leq \rho(y, x) < \varepsilon$. Следовательно, $y_i \in U$, $y \in O$ и $O_\varepsilon x \subset O$. В силу произвольности точки $x \in O$, $O \in \tau_\rho$. Поэтому тихоновская предбаза топологии τ содержится в τ_ρ и $\tau \subset \tau_\rho$.

Возьмем $O \in \tau_\rho$ и $x \in O$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon x \subset O$. Пусть $\delta = \varepsilon / n^{1/2}$ и $O_i = (x_i - \delta, x_i + \delta)$. Тогда для координат точки $y \in (\Pi = \cap\{(p_i)^{-1}O_i : i = 1, \ldots, n\})$ выполняются соотношения $|y_i - x_i| < \delta$. Поэтому $\rho(y, x) = (\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2)^{1/2} < \varepsilon$. Следовательно, $x \in \Pi \subset O_\varepsilon x \subset O$. Так как Π есть элемент тихоновской базы, то O есть объединение элементов этой базы. Следовательно, $O \in \tau$ и $\tau_\rho \subset \tau$. $\square$

Следствие 1. *Декартово подпроизведение $I^n = \prod\{I_i = [a_i, b_i] : a_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ топологического произведения $\mathbb{R}^n = \prod\{\mathbb{R}_i = \mathbb{R} : i = 1, \ldots, n\}$, $I_i \subset \mathbb{R}_i$, является (как подпространство $\mathbb{R}^n$) топологическим произведением n отрезков I_i.*

КОМПАКТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ (см. лекцию 9 в [Ф])

Будет доказана

Теорема Тихонова. *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

Нам потребуются некоторые предварительные рассмотрения.

Как известно, пространство компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система его замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Предложение 1. *Для пространства X эквивалентны утверждения:*

1) пространство X компактно,

2) для любой центрированной системы ξ произвольных подмножеств пространства X существует общая точка прикосновения всех элементов ξ (т.е. непусто пересечение замыканий всех элементов ξ).

Доказательство. 1)⇒2) Пусть система ξ подмножеств пространства X центрирована. Тогда и система $cl(\xi)$, состоящая из замыканий всех элементов из ξ, центрирована и, следовательно, имеет непустое пересечение.

Следование 2)⇒1) верно, так как замыкание замкнутого множества совпадает с ним самим. $\square$

Нам потребуется эквивалентная аксиоме выбора

Лемма Куратовского-Цорна. *Если упорядоченное множество $(C, \leq)$ таково, что для любого его линейно упорядоченного подмножества $(L, (\leq)|_L)$ существует элемент $c_0 \in C$, такой, что $c \leq c_0$ для всех $c \in L$, то в C существует максимальный элемент.*

Всюду далее на множестве C_X всех центрированных систем подмножеств какого-либо множества X (и на подмножествах множества C_X) всегда будем рассматривать порядок: $\mu \leq \nu$, если $\mu \subset \nu$.

Лемма 1 (о максимальной центрированной системе). *Для любого множества X, любой центрированной системы μ его подмножеств и множества $C \subset C_X$ всех $\nu \subset C_X$, содержащих μ (т.е. $\mu \leq \nu$), в C существует максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть L – линейно упорядоченное подмножество множества C. Возьмем $\mu' = \cup L$. Если $m_i \in \mu'$, то существует $\nu_i \in L$, содержащее m_i, $i = 1, \ldots, k$. Можно считать, что $m_i \leq m_k$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда все m_i – элементы системы ν_k и $m_1 \cap \ldots \cap m_k \neq \emptyset$. Следовательно, система μ' центрирована и, очевидно, содержит μ. По лемме Куратовского-Цорна, в C имеется максимальный элемент. □

Замечание к лемме1. Любой максимальный элемент μ_{max} множества C из леммы 1 обладает следующими свойствами:

1. пересечение любого конечного набора элементов системы μ_{max} также является элементом этой системы;

2. если множество $m \subset X$ пересекает все элементы системы μ_{max}, то m – также элемент этой системы.

Доказательство. 1. Пусть m есть пересечение элементов m_i системы μ_{max}, $i = 1, \ldots, k$. Тогда для любого набора элементов n_j системы μ_{max}, $j = 1, \ldots, l$, пересечение $m \cap n_1 \cap \ldots \cap n_l = m_1 \cap \ldots \cap m_k \cap n_1 \cap \ldots \cap n_l$ непусто (в силу центрированности μ_{max}). В силу максимальности μ_{max}, $m \in \mu_{max}$.

2. Пусть m пересекает все элементы системы μ_{max}. Возьмем элементы n_j системы μ_{max}, $j = 1, \ldots, l$. По пункту 1., $(n = n_1 \cap \ldots \cap n_l) \in \mu_{max}$. Поэтому $m \cap n_1 \cap \ldots \cap n_l = m \cap n \in \mu_{max}$. Как в пункте 1., $m \in \mu_{max}$. □

Доказательство теоремы Тихонова. Пусть X есть тихоновское произведение компактных пространств X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, и $p_\alpha : X \to X_\alpha$ – проекции произведения на сомножители.

Возьмем центрированную систему μ замкнутых в X множеств. Пусть (как в лемме 1) C есть множество всех $\nu \subset C_X$, содержащих μ. По лемме 1, в C существует максимальный элемент μ_{max}. Пусть μ_α состоит из проекций $p_\alpha(m)$ всех $m \in \mu_{max}$. Система μ_α, очевидно, центрирована. По предложению 1, существует общая точка прикосновения x_α всех элементов системы μ_α. Рассмотрим точку $x \in X$ с координатами x_α. Возьмем произвольно индексы $\alpha(i) \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, k$, и окрестности O_i точек $x_{\alpha(i)}$. Так как O_i пересекает все элементы системы μ_α, то прообраз $U_i = (p_\alpha)^{-1} O_i$ пересекает все элементы системы μ_{max}. По замечанию к лемме 1, $U_i \in \mu_{max}$ для всех i и $x \in (U = \cap\{U_i : i = 1, \ldots, k\}) \in \mu_{max}$. Следовательно, окрестность U точки x пересекает все элементы системы μ_{max}. Мы доказали, что произвольная окрестность точки x, являющаяся элементом тихоновской базы произведения X, пересекает все элементы системы μ_{max}. Поэтому все окрестности точки x пересекают все элементы системы μ_{max}, т.е. x – общая точка прикосновения всех элементов системы μ_{max}. Следовательно, эта точка при-надлежит всем элементам системы μ и $\cap \mu \neq \emptyset$. Компактность X доказана. □

Так как тихоновское произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово, то получаем

Следствие 1. *Тихоновское произведение компактов – компакт.*

Следствие 2. *Пространство $\mathbb{R}^n$ локально компактно.*

Действительно, замыканием окрестности $\prod\{(x_i - 1, x_i + 1) : i = 1, \ldots, n\}$ точки $x \in \mathbb{R}^n$ является компакт $\prod\{[x_i - 1, x_i + 1] : i = 1, \ldots, n\}$. □

МЕТРИЗУЕМОСТЬ (см. лекцию 10 в [Ф])

Пространство (X, τ) называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что $\tau = \tau_\rho$ (т.е. топология τ порождается метрикой ρ).

Доказать, что

метризуемость – топологический инвариант.

Замечание 10.1. Как было ранее доказано, для метрического пространства (X, ρ) и $A \subset X$ топологии $(\tau_\rho)|_A$ и $\tau|_{(\rho|_A)}$ совпадают. Поэтому

подпространство метризуемого пространства метризуемо.

Лемма 10.1. *Пусть X – множество, ρ – метрика на нем и $\alpha > 0$. Для $x, y \in X$ положим $d(x, y) = min(\rho(x, y), \alpha)$. Тогда 1) d– метрика на X и 2) метрики ρ и d порождают одну и ту же топологию на X.*

Доказательство. Утверждение 1) легко проверяется. Докажем утверждение 2). Пусть f есть тождественное отображение (X, ρ) на (X, d), а g – обратное к нему отображе-ние. Непрерывность f в любой точке пространства (X, ρ) вытекает из неравенства $d(x, y) \leq \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Если $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, то для $\delta = min(\alpha, \varepsilon)$ образ δ-окрестности точки x в (X, d) под действием g содержится в ε-окрестности точки x в (X, ρ). □

Теорема 10.1. *Тихоновское произведение счетной системы метризуемых пространств метризуемо.*

Доказательство. Пусть X есть тихоновское произведение метризуемых пространств X_n и p_n – проекция произведения X на сомножитель X_n, $n = 1, 2, \ldots$ По предыдущей лемме, можно считать, что топология X_n задается такой метрикой, что $diam\, X_n \leq 1/n$. Для $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ будем считать $d(x, y) = max\, \{\rho(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Аксиомам тождества и симметрии d, очевидно, удовлетво-ряет. Проверим выполнение неравенства треугольника. Возьмем точки x, y, z из X (с координатами x_n, y_n, z_n, соответственно). Существует такой номер m, что $d(x, z) = \rho(x_m, z_m)$. Тогда $d(x, z) \leq \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, z_m) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Следова-тельно, d – метрика на X.

Покажем, что топология τ_d, порожденная метрикой d, совпадает с тихоновской топологией τ произведения X. Возьмем точку $x \in X$ с координатами x_n и произвольную ее ε-окрестность O_ε. Через $O_{\varepsilon n}$ обозначим ε-окрестность точки x_n в X_n. Возьмем номер m так, что $X_n \subset O_{\varepsilon n}$ для всех $n > m$. Тогда

$$(*)\ O_\varepsilon = \cap\{(p_n)^{-1} O_{\varepsilon n} : n \leq m\} (\in \tau).$$

Так как все ε-окрестности всех точек пространства (X, d) образуют базу его топологии, то $\tau_d \subset \tau$. Пусть множество U открыто в некотором X_l и $O = (p_l)^{-1} U$. Возьмем точку $x \in O$ с координатами x_n. Тогда существует число $\varepsilon(x) > 0$, такое, что $\varepsilon(x)$-окрестность точки x_l в X_l содержится в U. Из равенства $(*)$ (можно взять $m \geq l$) следует, что $\varepsilon(x)$-окрестность точки x содержится в O. Значит $O \in \tau_d$. Так как O –произвольный элемент тихоновской предбазы произведения X, то $\tau \subset \tau_d$. □

Следствие 10.1. *Счетная топологическая степень I^ω невырожденного отрезка I метризуема.*

Теорема Урысона - Тихонова. *Тихоновское пространство со счетной базой метризуемо.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую далее лемму.

Подмножество O пространства X будем называть *функционально открытым* (кратко, фо), если существует такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что

$O = f^{-1}[0,1)$.

Лемма 10.2. *В тихоновском пространстве со счетной базой существует счетная база из фо множеств.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ – счетная база в тихоновском пространстве X. Упорядоченную пару (U, V) элементов базы $\mathcal{B}$ назовем фо-отделимымой, если существует такое фо множество $O(U,V)$, что $U \subset O(U,V) \subset V$. Из счетности $\mathcal{B}$ вытекает счетность множества всех фо-отделимых пар (U, V) и множества $\mathcal{B}_{fo}$ всех фо множеств $O(U,V)$. Осталось доказать, что $\mathcal{B}_{fo}$ – база пространства X.

Возьмем открытое в X множество O и точку $x \in O$. Существует такое $V_x \in \mathcal{B}$, что $x \in V_x \subset O$. Из тихоновости X вытекает существование такой непрерывной функции $f : X \to [0,1]$, что $(O' = f^{-1}[0,1)) \subset V_x$ и $fx = 0$. Очевидно, множество O' фо и $x \in O'$. Возьмем $U_x \in \mathcal{B}$ так, что $x \in U_x \subset O'$. Ясно, что пара (U_x, V_x) является фо-отделимой. Следовательно, $x \in U_x \subset O(U_x, V_x) \subset V_x \subset O$. Очевидно, $O = \cup\{O(U_x, V_x) : x \in O\}$. $\square$

Коограничением отображения множеств $F : X \to Y$ называется такое отображение $f : X \to F(X)$, что $fx = Fx$ для всех $x \in X$ (иногда коограничение отображения F обозначается символом $cor(F)$). Очевидно,

коограничение непрерывного отображения непрерывно.

Доказательство теоремы Урысона-Тихонова. Пусть тихоновское пространство X обладает счетной базой $\mathcal{B} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$. По предыдущей лемме, можно считать, что все элементы этой базы фо. Теорема будет доказана, если мы докажем, что пространство X гомеоморфно подпространству произведения I^ω (см. замечание 10.1).

Будем считать, что I^ω есть произведение отрезков $I_n = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Через p_n обозначим проекцию произведения X на сомножитель I_n. Для каждого n возьмем такую непрерывную функцию $f_n : X \to I_n$, что $(f_n)^{-1}[0,1) = O_n$. Через F обозначим диагональное произведение всех отображений f_n. Положим $Y = F(X)$. По доказан-ному ранее, отображение F непрерывно. Следовательно, непрерывно и его коогра-ничение $f : X \to Y$. Если $x, x' \in X$ и $x \neq x'$, то существует n, для которого $x \notin O_n \ni x'$. Тогда $f_n x \neq f_n x'$ и (так как $f_n = p_n \circ F$) $Fx \neq Fx'$. Следовательно, отображение F инъективно, а отображение f биективно. Так как $f_n = p_n \circ F$, то $f_n = p_n \circ f$, $O_n = (f_n)^{-1}[0,1) = f^{-1}(Y \cap (p_n)^{-1}[0,1)$. В силу непрерывности p_n, множество $f(O_n) = Y \cap (p_n)^{-1}[0,1)$ открыто в Y. Поэтому для обратного к f отображения g прообразы $g^{-1}O_n = f(O_n)$ всех элементов базы $\mathcal{B}$ открыты в Y. Следовательно, g непрерывно, а f гомеоморфно. $\square$

ГОМОТОПИЯ. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. СТЯГИВАЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА (см. лекцию 13 в [Ф])

Сначала надо прочитать в [Ф]:

13.1. Определение гомотопии.

13.1. Теорему 13.4 (с доказательством).

13.6. Определение.

Далее.

13.5. Пример. *Все непрерывные отображения любого пространства X в отрезок I гомотопны (т.е. $\pi(X, I)$ состоит из одного элемента).*

Доказательство. Пусть отображения $f, g : X \to I$ непрерывны. Рассмотрим отображение $\Phi : X \times I \to I$, определяемое формулой $\Phi(x,t) = (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$.

Пусть p и q – проекции произведения $X \times I$ на сомножители X и I, соответственно. Из непрерывности f, g, p и q вытекает непрерывность $\Phi(x,t) = (1 - q(x,t)) \cdot f(p(x,t)) + q(x,t) \cdot g(p(x,t))$. Следовательно, Φ – гомотопия, соединяющая f и g. $\square$

Нам потребуются две следующие леммы.

Лемма $(*)$**.** *Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, а отображения $g, h : Y \to Z$ непрерывны и гомотопны, то отображения $g \circ f, h \circ f : X \to Z$ гомотопны.*

Доказательство. Пусть $\Phi : Y \times I \to Z$ – гомотопия, соединяющая g и h и пусть $\Psi : X \times I \to Y \times Z$ – произведение отображений f и $id|_I$. Легко проверить, что $\Phi \circ \Psi$ – гомотопия, соединяющая отображения $g \circ f$ и $h \circ f$. (Например, $(\Phi \circ \Psi)(x,0) = \Phi(f(x),0) = g(f(x))$.) $\square$

Лемма $(**)$**.** *Если отображения $f, g : X \to Y$ гомотопны, а отображение $h : Y \to Z$ непрерывно, то отображения $h \circ f, h \circ g : X \to Z$ гомотопны.*

Доказательство. Пусть $\Phi : X \times I \to Y$ – гомотопия, соединяющая f и g и пусть $(\Psi = h \circ \Phi) : X \times I \to Z$. Легко проверить, что Ψ – гомотопия, соединяющая отображения $h \circ f$ и $h \circ g$. (Например, $\Psi(x,0) = h(\Phi(x,0)) = h(f(x))$.) $\square$

Следствие из лемм $(*)$ **и** $(**)$**.** *Если гомотопны пары отображений $f, g : X \to Y$ и $h, k : Y \to Z$, то гомотопны и отображения $h \circ f$ и $k \circ g$.*

Действительно, $h \circ f \sim h \circ g \sim k \circ g$. $\square$

Дальше надо читать в [Ф]:

13.10. Определение.

13.11. Замечание.

13.12. Теорема. *Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе всех топологических пространств.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения гомотопической эквивалентности очевидны. Докажем его транзитивность.

Пусть существуют такие непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $f' : Y \to X$, $g : Y \to Z$ и $g' : Z \to Y$, такие, что $f' \circ f = id_X$, $f \circ f' = id_Y$ и $g' \circ g = id_Y$, $g \circ g' = id_Z$. Тогда, по леммам $(*)$ и $(**)$, $(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ ((g' \circ g) \circ f) \sim f' \circ ((id_Y) \circ f) = f' \circ f \sim id_X$ и, аналогично, $(g \circ f) \circ (f' \circ g') \sim id_Z$. $\square$

Дальше надо читать в [Ф]:

пункт **13.13.** и следующий абзац,

13.14. Упражнения.

13.15. Замечание. (Точка и отрезок.)

Замечание (для досрочно сдающих экзамен). *Двумерная сфера S^2 односвязна* (т.е. она линейно связна и любое непрерывное отображение окружности в S^2 гомотопно постоянному), *но не стягиваема.*