Список вопросов к экзамену

1. Метрическое пространство (определение и простейшие примеры). Топологическое пространство (определение и простейшие примеры). Система окрестностей точки в топологическом пространстве, связь топологии с системой окрестностей. База и предбаза топологии, локальная база, первая и вторая аксиомы счётности. Критерий того, что семейство подмножеств множества является базой некоторой топологии на этом множестве.
2. Примеры метрических пространств. Доказательство того, что всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности. Примеры метрических пространств без первой аксиомы счётности. Ультраметрика. Пример ультраметрического пространства (не обязательно p-адические числа). Способы получения новых метрик из имеющихся. Метризуемое топологическое пространство.
3. Примеры топологических пространств. Топология, порождённая метрикой. Топология, порождённая линейным порядком. Топология, порождённая лексикографическим порядком на плоскости. Сравнение топологий.
4. Типы точек в топологическом пространстве по отношению к подмножеству этого топологического пространства: точки прикосновения, предельные точки, точки накопления, изолированные и внутренние точки. Предельные, изолированные и внутренние точки множества в метрическом пространстве. Замыкание и внутренность множества. Оператор замыкания, оператор топологического замыкания. Задание топологии с помощью оператора замыкания. Оператор внутренности.
5. Аксиомы отделимости. Примеры, различающие классы T_0-, T_1-, T_2-, T_3- и T_4-пространств. Хаусдорфовость метризуемых пространств.
6. Последовательность, подпоследовательность. Сходимость последовательности. Предел последовательности, точка накопления последовательности. Пространство Фреше–Урысона. Доказательство того, что всякое пространство с первой аксиомой счётности (и всякое метризуемое простанство) является пространством Фреше–Урысона. Пример пространства Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности.
7. Направленное множество. Направленность, поднаправленность. Сходимость направленности. Предел направленности, предельная точка направленности. Доказательство того, что точка y в топологическом пространстве X является точкой накопления множества $Y \subset X$ тогда и только тогда, когда некоторая направленность в Y сходится к y.
8. Подпространство топологического пространства. Индуцированная топология. Примеры. База индуцированной топологии. Замыкание множества в подпространстве, его связь с замыканием этого множества в объемлющем пространстве. Наследственные свойства топологических пространств (определение). Наследственность первой и второй аксиом счётности и аксиом отделимости T_0–T_3. Наследование нормальности замкнутыми подпространствами нормального пространства. Наследственность метризуемости.
9. Всюду плотное подмножество топологического пространства. Сепарабельность топологического пространства. Доказательство того, что всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности. Сепарабельность любого пространства со второй аксиомой счётности. Наследственная сепарабельность сепарабельного метризуемого пространства. Наследование сепарабельности открытыми подпространствами сепарабельного пространства. Доказательство того, что если $\overline{Y} = X$ и U — открытое подмножество X, то $\overline{U} = \overline{U \cap Y}$ (все замыкания в X).
10. Непрерывные отображения метрических и топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Равносильные непрерывности свойства отображений топологических пространств. Непрерывность расстояния от точки до множества. Нормальность метризуемого пространства.
11. Лемма Урысона.
12. Теорема Титце–Урысона о продолжении непрерывных функций в $[0,1]$ и $\mathbb{R}$, определённых на нормальном пространстве.
13. Доказательство теоремы: если Y — всюду плотное подмножество топологического пространства X, Z — хаусдорфово пространство и $f, g\colon X \to Z$ – непрерывные отображения, совпадающие на Y, то f и g совпадают на X. Плоскость Немыцкого, её ненормальность.
14. Вполне регулярное, или тихоновское, топологическое пространство. Доказательство того, что плоскость Немыцкого вполне регулярна. Гомеоморфизмы, топологические свойства (определение). Гомеоморфное вложение (определение).
15. Покрытие топологического пространства, открытое покрытие, подпокрытие (определения). Компактное топологическое пространство, компакт (определение). Характеристика компактности в терминах центрированных семейств замкнутых множеств. Доказательство свойств компактов: компактное подмножество любого хаусдорфова пространства замкнуто; любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно; непрерывный образ любого компактного пространства компактен; любая непрерывная биекция из компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом; любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена; любое бесконечное множество в компакте имеет предельную точку.
16. Доказательство нормальности всякого компакта.

17. Теорема Бэра о категориях.
18. Определение sup-нормы и топологии равномерной сходимости на пространстве непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве. Равномерная сходимость последовательности ограниченных функций. Лемма о существовании последовательности многочленов, равномерно сходящейся в функции $\sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ (без доказательства). Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
19. Произведение множеств. Координаты элементов произведения, проекции. Тихоновская топология, или топология произведения, на произведении топологических пространств. Топология поточечной сходимости на пространстве отображений. Каноническая база тихоновской топологии. Совпадение индуцированной топологии произведения подпространств с топологией произведения этих подпространств. Замкнутость произведения замкнутых подмножеств. Доказательство того, что произведение всюду плотных подмножеств топологических пространств всюду плотно в произведении этих пространств.
20. Доказательство того, что произведение пространств удовлетворяет какой-нибудь из аксиом отделимости T_0–$T_{3\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда все сомножители удовлетворяют этой аксиоме. Доказательство того, что если тихоновское произведение пространств нормально, то и все сомножители нормальны. Доказательство того, что нормальность не мультипликативна и даже не конечно мультипликативна.
21. Критерий непрерывности отображения топологического пространства в тихоновское произведение. Декартово и диагональное произведение отображений. Семейство отображений, разделяющее точки. Семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества. Теорема о том, что если семейство отображений разделяет точки, то диагональное отображение инъективно, и если семейство отображений разделяет точки и замкнутые множества, то диагональное отображение является гомеоморфным вложением.
22. Теорема о вложении тихоновского пространства в тихоновский куб. Метризационная теорема Урысона (о метризуемости хаусдорфовых пространств со счётной базой).
23. Фильтры и ультрафильтры. Характеризация ультрафильтров. Сходимость ультрафильтров. Характеризация компактности в терминах сходимости ультрафильтров. Теорема Тихонова о произведении компактов.
24. Компактификация топологического пространства (определение и существование). Эквивалентные компактификации. Теорема о мощности компактификаций. Отношение порядка на множестве классов эквивалентных компактификаций, теорема о его антисимметричности. Теорема о существовании наибольшей (стоун-чеховской) компактификации для любого тихоновского пространства.
25. Определение александровской (одноточечной) компактификации, её минимальность. Теорема об александровской компактификации (её существование для любого локально компактного хаусдорфова пространства).
26. Стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X. Теорема о том, что каждое непрерывное отображение пространства X в компакт продолжается до непрерывного отображения βX в этот компакт.
27. Определение локально компактных пространств и доказательство их свойств: всякое хаусдорфово локально компактное пространство вполне регулярно; характеризация локально компактных пространств как открытых подпространств компактов; открытость всюду плотных локально компактных подпространств хаусдорфовых пространств.
28. Отношение вписанности покрытий. Локально конечные покрытия. Определение паракомпактного пространства. Определение консервативного семейства подмножеств топологического пространства. Доказательство консервативности всякого локально конечного семейства подмножеств топологического пространства. Доказательство нормальности всякого хаусдорфова паракомпактного пространства. Наследование паракомпактности замкнутыми подпространствами.
29. Определение разбиения единицы на топологическом пространстве. Разбиение единицы, подчинённое покрытию. Локально конечное разбиение единицы. Доказательство того, что всякому открытому покрытию паракомпакта подчинено некоторое разбиение единицы. Теорема Стоуна о паракомпактности метризуемых пространств (без доказательства).
30. Определение финально компактных и линделёфовых пространств. Характеризация финальной компактности в терминах центрированных семейств замкнутых множеств. Сохранение финальной компактности непрерывными отображениями и наследование её замкнутыми подпространствами. Доказательство того, что Финальная компактность не конечно мультипликативна. Доказательство паракомпактности каждого линделёфова пространства.
31. Счётно компактные и псевдокомпактные пространства. Равенство: счётная компактность + линделёфовость = = компактность. Наследование счётной компактности замкнутыми подпространствами. Доказательство равносильности счётной компактности тому, что пересечение любого счётного центрированного семейства замкнутых множеств имеет непустое пересечение, а также тому, что каждое бесконечное множество в нём имеет точку накопления. Доказательство равносильности псевдокомпактности тому, что каждое локально конечное открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Доказательство псевдокомпактности счётно компактного пространства. Доказательство счётной компактности нормального псевдокомпактного пространства. Равенство: псевдокомпактность + линделёфовость = компактность.

32. Сумма топологических пространств. Открыто-замкнутость слагаемых. Критерий непрерывности отображения суммы. Совпадение топологии суммы подпространств с топологией, индуцированной из суммы объемлющих пространств. Критерии того, что сумма удовлетворяет аксиомам отделимости, локально компактна, паракомпактна, компактна, счётно компактна, финально компактна, удовлетворяет первой аксиоме счётности, удовлетворяет второй аксиоме счётности, сепарабельна. Примеры.

33. Факторпространство, фактортопология, естественное факторное отображение. Характеризация факторных отображений топологических пространств. Непрерывность факторных отображений. Открытые и замкнутые отображения (определение). Связь открытости и замкнутости отображений с факторностью. Биективные факторные отображения. Условие, при котором факторпространство является T_1-пространство. Стягивание множества $F \subset X$ в точку. Условия, при которых X/F является T_1-пространством, хаусдорфово, регулярно. Присоединение (приклеивание) пространства по отображению. Склеивание подпространств.

34. Связное топологическое пространство. Критерии связности. Мощность непустого неодноточечного связного пространства. Сохранение связности непрерывными отображениями. Связность вещественной прямой. Связность объединения пересекающихся связных подпространств. Связность замыкания связного подпространства. Доказательство того, что если любые две точки пространства содержатся в связном подпространстве, то это пространство связно. Континуум (определение). Равносильность связности пространства X и связности его стоун-чеховской компактификации βX.

35. Компоненты (связности точек) топологического пространства. Квазикомпоненты. Совпадение компонент с квазикопонентами для компактов. Вполне несвязные, нульмерные и сильно нульмерные топологические пространства (определение). Доказательство того, что каждое сильно нульмерное пространство нульмерно. Доказательство того, что любой вполне несвязный компакт сильно нульмерен.

36. Граница множества. Малая индуктивная размерность регулярного пространства. Теорема: если X — регулярное пространство и $Y \subset X$, то $\operatorname{ind} Y \leqslant \operatorname{ind} X$. Большая индуктивная размерность нормального пространства. Теорема: для любого нормального пространства X $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$. Лебегова размерность. Доказательство того, что если X — T_1-пространство и $\dim X \leqslant 0$, то X нормально и $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$. Формулировки (без доказательства): $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ для любого нормального X; теорема счётной суммы для размерности dim; $\dim[0,1]^n = \operatorname{ind}[0,1]^n = \operatorname{Ind}[0,1]^n = n$; $\dim \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = n$; для любого сепарабельного метризуемого пространства X $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$; для любого метризуемого пространства X $\dim X = \operatorname{Ind} X$; для любого нормального пространства X $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ (и $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$).

37. Гомотопии (определение). Петли. Описание фундаментальной группы (без доказательств). Фундаментальная группа окружности (без доказательства). Сфероиды. Гомотопические группы (без доказательств). Гомотопические группы $\pi_n(S^n)$ и $\pi_n(D^n)$ (без доказательства). Теорема Брауэра о неподвижной точке (формулировка). Ретракция. Теорема о неретрагируемости шара на сферу (формулировка). Вывод теоремы Брауэра из теоремы о неретрагируемости и теоремы о неретрагируемости из теоремы Брауэра. Схема доказательства теоремы о неретрагируемости с помощью гомотопических групп.

38. Определение топологической группы. Однородность топологической группы. Доказательство того, что всякая топологическая группа, удовлетворяющая аксиоме T_0, регулярна. Факты без доказательства: всякая топологическая группа, удовлетворяющая аксиоме T_0, вполне регулярна; всякая топологическая группа с первой аксиомой счётности метризуема.