Произведения

Во всех задачах этого раздела A — произвольное непустое множество (индексов). Под *топологическим*, или *тихоновским*, *произведением* топологических пространств подразумевается декартово произведение с тихоновской топологией.

1. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и для каждого $\alpha \in A$ Y_α — подпространство X_α. Тогда декартово произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ является подмножеством произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Проверьте, что тихоновская топология на этом произведении совпадает с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

2. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.
   а) Покажите, что $Y = \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ плотно в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ тогда и только тогда, когда Y_α (т.е. проекция Y на X_α) плотно в X_α для каждого $\alpha \in A$.
   б) Покажите, что если $Y \subset \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ плотно в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, то проекция $p_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$.
   в) Приведите пример произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и множества $Y \subset X$ таких, что проекция $p_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$, однако Y не плотно в X.

3. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.
   а) Покажите, что $\overline{\prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha} = \prod\limits_{\alpha\in A} \overline{Y}_\alpha$ (и, следовательно, Y замкнуто в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ тогда и только тогда, когда проекция $p_\alpha(Y) = Y_\alpha$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$).
   б) Приведите пример произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и замкнутого множества $Y \subset X$ таких, что проекции $p_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α.
   в) Приведите пример произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y \subset X$ таких, что проекция $p_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$.

4. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства. Покажите, что X_α гомеоморфно подпространству топологического произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$, а если вдобавок все X_α, $\alpha \in A$, являются T_1-пространствами, то каждое X_α гомеоморфно замкнутому подпространству X.

5. а) Проверьте, что топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_i, где $i \leqslant 3\frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда все сомножители X_α удовлетворяют этой аксиоме.
   б) Приведите пример нормальных пространств, произведение которых не нормально.

6. Докажите, что топологическое произведение непустых пространств удовлетворяет первой аксиоме счётности (удовлетворяет второй аксиоме счётности, метризуемо) тогда и только тогда, когда все сомножители обладают тем же свойством и все, кроме счётного числа, одноточечны.

7. Пусть X и X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства.
   а) Покажите, что если $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, — непрерывные отображения и существует $\alpha_0 \in A$, для которого f_{α_0} — гомеоморфное вложение, то диагональное отображение $\mathop{\triangle}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ — гомеоморфное вложение.
   б) Множество $\{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X^A : x_\alpha = x_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in A\}$ называется *диагональю произведения* X^A. Докажите, что диагональ произведения X^A всегда гомеоморфна пространству X.
   в) Покажите, что если $|A| \geqslant 2$, то диагональ произведения X^A замкнута тогда и только тогда, когда X хаусдорфово.

8. Докажите, что канторово множество $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно топологическому произведению $\{0,1\}^{\aleph_0}$.

9. Докажите, что множество $\mathbf{P}$ иррациональных чисел гомеоморфно топологическому произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.
   Подсказка. Рассмотрите разложение действительного числа в цепную дробь. Воспользуйтесь тем, что вещественное число рационально тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь конечно.

10. Докажите, что топологическое произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in A} D_\alpha$, где D_α — конечное дискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, и A бесконечно, гомеоморфно тихоновскому произведению $\{0,1\}^A$.

11. Докажите, что если X — хаусдорфово пространство и $\mathscr{Y}$ — семейство его подпространств, то пространство $\bigcap\{Y : Y \in \mathscr{Y}\} \subset X$ с топологией, индуцированной из X, гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod\{Y : Y \in \mathscr{Y}\}$.