Компакты и компактификации

1. Докажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:
   а) X компактно;
   б) всякая направленность на X сходится к некоторой точке $x \in X$;
   в) всякий ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X сходится к некоторой точке $x \in X$ (т.е. любая окрестность x принадлежит $\mathscr{U}$).

2. а) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если оно замкнуто в любом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.

   Подсказка. Для доказательства импликации «$\Leftarrow$» найдите ультрафильтр $\mathscr{U}$ на некомпактном регулярном пространстве X, который не сходится ни к какой точке, добавьте к X точку ξ и объявите базой её окрестностей все множества вида $\{\xi\} \cup U$, где U — открытый элемент $\mathscr{U}$. Пространство $X \cup \{\xi\}$ хаусдорфово, потому что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \notin \mathscr{U}$, и окрестность V такая, что $\overline{V} \subset U$, не пересекается с окрестностью $\{\xi\} \cup X \setminus \overline{V}$ точки $\{\xi\}$.

   б) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если любое взаимно однозначное непрерывное отображение этого пространства на произвольное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

   Подсказка. Для доказательства импликации «$\Leftarrow$» найдите ультрафильтр $\mathscr{U}$ на некомпактном регулярном пространстве X, который не сходится ни к какой точке X, зафиксируйте любую точку $\xi \in X$ и объявите новой базой её окрестностей все множества вида $\{\xi\} \cup U \cup V$, где U — открытый элемент $\mathscr{U}$ и V — открытая окрестность ξ в X. Окрестности остальных точек оставьте прежними. Получившаяся топология строго слабее исходной топологии X.

3. Точка $x \in X$ топологического пространства называется *точкой полного накопления* множества $A \subset X$, если для любой её окрестности U выполнено условие $|U \cap A| = |A|$.
   а) Докажите, что топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякое бесконечное множество в нём имеет точку полного накопления.

   Подсказка. Заметьте, что компактность пространства X равносильна тому, что для любого кардинала κ всякая система непустых замкнутых множеств F_α, $\alpha < \kappa$, со свойством $F_\alpha \supset F_\beta$ для $\alpha < \beta < \kappa$ имеет непустое пересечение. Действительно, если X не компактно, то в нём есть центрированная система $\mathscr{F}'$ замкнутых множеств с пустым пересечением; надо взять в качестве κ минимальную мощность подсемейства $\mathscr{F}'' \subset \mathscr{F}'$ с пустым пересечением и как-нибудь заиндексировать элементы такого $\mathscr{F}''$ ординалами $\alpha < \kappa$: $\mathscr{F}'' = \{F''_\beta : \beta < \kappa\}$. Убывающая система $\mathscr{F} = \{F_\alpha = \bigcap_{\beta \leqslant \alpha} F''_\beta : \alpha < \kappa\}$ имеет непустое пересечение. Выбрав по точке $x_\alpha \in F_{\alpha+1} \setminus F_\alpha$ для каждого α, получим множество, точка полного накопления которого (если она существует) обязана принадлежать $\bigcap \mathscr{F}$.

   б) Докажите, что пространство ординалов $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ с порядковой топологией компактно. Заметьте, что пространство ординалов $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ с порядковой топологией не компактно, однако любое бесконечное множество имеет в нём точку накопления.

4. а) Покажите, что всякий метризуемый компакт сепарабелен и, значит, удовлетворяет второй аксиоме счётности.
   б) Приведите пример несепарабельного компакта с первой аксиомой счётности.

   Подсказка: Вспомните об операции удвоения по Александрову, описанной в задаче 10 о подпространствах.

   в) Приведите пример неметризуемого сепарабельного компакта с первой аксиомой счётности.

   Подсказка: Покажите, что годится пространство, известное как *две стрелки* Александрова: это множество $A_0 \cup A_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где $A_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leqslant 1\}$ и $A_1 = \{(x, 1) : 0 \leqslant x < 1\}$, с топологией, порождённой базой, состоящей из множеств вида $\{(x, 0) : a < x \leqslant b\} \cup \{(x, 1) : a < x < b\}$, где $0 < a, b \leqslant 1$, и вида $\{(x, 0) : a < x < b\} \cup \{(x, 1) : a \leqslant x < b\}$, где $0 \leqslant a, b < 1$ (так что A_0 и A_1 гомеоморфны стрелке Зоргенфрея).

5. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:
   (i) существует порождающая топологию X метрика такая, что подмножество X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в этой метрике;
   (ii) X сепарабельно и локально компактно.

   Подсказка: (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из того, что X является объединением счётного числа метризуемых (и потому сепарабельных) компактов. Для доказательства того, что (ii) $\Rightarrow$ (i), рассмотрите одноточечную компактификацию $K = X \cup \{*\}$ пространства X и покажите, что она метризуема некоторой метрикой d. Затем модифицируйте метрику d так, чтобы получить порождающую топологию метрику ρ на X с тем свойством, что все ограниченные в (X, ρ) множества $A \subset X$ отделены от точки $*$ в K непересекающимися окрестностями. Для этой цели достаточно построить неограниченную непрерывную функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$ и положить $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| + d(x, y)$.

6. Пусть c_1X и c_2X — две компактификации пространства X и $f\colon c_1X \to c_2X$ — непрерывное отображение, тождественное на X (т.е. $f(x) = x$ для всех $x \in X$). Покажите, что $f(c_1X \setminus X) \subset c_2X \setminus X$ (нарост переходит в нарост).

7. Пусть αD_1 и αD_2 — две непересекающиеся гомеоморфные копии одноточечной компактификации дискретного пространства D мощности $2^{\aleph_0}$, и пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — их (одинаковые) топологии. Рассмотрим $X = \alpha D_1 \cup \alpha D_2$ с топологией, порождённой базой $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ (так что открытые множества в X — это в точности все множества вида $U \cup V$, где U открыто в αD_1 и V открыто в αD_2; в частности, αD_1 и αD_2 открыты и замкнуты в X). Очевидно, X — (двухточечная) компактификация пространства D. Заметьте, что *двойная окружность Александрова* A (это пространство, которое получается применением операции удвоения по Александрову к обычной окружности; см. задачу 10 о подпространствах) тоже является компактификацией пространства D. Покажите, что компактификации X и A несравнимы. (Отсюда, очевидно, следует, что $\alpha D \neq \beta D$.)

8. Докажите, что компактификация cX тихоновского пространства X совпадает со стоун-чеховской компактификацией βX тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция $X \to [0, 1]$ продолжается до непрерывной функции $cX \to [0, 1]$.

9. Докажите, что одноточечная компактификация пространства W_1^0 всех не более чем счётных ординалов совпадает со стоун-чеховской.

   Подсказка: заметьте, что любая непрерывная функция $W_1^0 \to [0, 1]$ постоянна начиная с некоторого ординала и потому продолжается на $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$.

10. Докажите, что $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

    Подсказка. Возьмите любой сепарабельный компакт K мощности $2^{2^{\aleph_0}}$ (например, годится $[0, 1]^{[0,1]}$ — этот компакт содержит всюду плотное подпространство $(0, 1)^{[0,1]}$, гомеоморфное пространству $\mathbb{R}^{[0,1]}$, которое, в свою очередь, содержит счётное всюду плотное множество многочленов с рациональными коэффициентами). Пусть D счётно и плотно в K. Рассмотрите любое отображение $\mathbb{N} \to D \subset K$ и его продолжение до непрерывного отображения $\beta\mathbb{N} \to K$. Заметьте, что $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$ для любого хаусдорфова пространства X, поэтому мощность $\beta\mathbb{N}$ не может быть больше $2^{2^{\aleph_0}}$.