Гомеоморфизмы

1. Покажите, что для биективного отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств следующие условия равносильны:
   а) f — гомеоморфизм;
   б) множество $A \subset X$ открыто (замкнуто) в X тогда и только тогда, когда $f(A)$ открыто (замкнуто) в Y;
   в) множество $B \subset Y$ открыто (замкнуто) в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(B)$ открыто (замкнуто) в X.

2. Докажите, что если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, то его график $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) : x \in X,\ y = f(x)\} \subset \subset X \times Y$ гомеоморфен пространству X. Верно ли обратное? (*Подсказка:* рассмотрите отображение в неодноточечное пространство суммы $X \oplus X \oplus \dots$ бесконечного числа непересекающихся гомеоморфных копий пространства X такого, что $X = Y \cup Z$, где $Y \cap Z = \varnothing$ и оба подпространства Y и Z гомеоморфны X, но не являются открыто-замкнутыми подмножествами X.)

3. Докажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение компакта на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом. Приведите пример взаимно однозначного непрерывного отображения некомпактного хаусдорфова пространства на компакт (которое, разумеется, не является гомеоморфизмом).

4. а) Покажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя является гомеоморфизмом. Верно ли это для произвольного хаусдорфова топологического пространства?
   б) Покажите, что биекция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она монотонна (т.е. либо всюду возрастает, либо всюду убывает). Верно ли это для произвольного линейно упорядоченного пространства с топологией порядка?

5. Придумайте два негомеоморфных хаусдорфовых пространства X и Y, для которых существуют непрерывные биекции $X \to Y$ и $Y \to X$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

- $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с метрикой d_n, определённой правилом $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство с метрикой d_n, определённой правилом $d_n(l_1, l_2) = (\widehat{l_1, l_2})$ для $l_1, l_2 \in \mathbb{P}^n$ (напомним, что точки $\mathbb{P}^n$ — проходящие через ноль прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, $(\widehat{\cdot\,, \cdot})$ — величина угла);
- $D^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}$ — n-мерный *открытый диск* (то же, что шар) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0$;
- $\overline{D}^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leqslant r\}$ — n-мерный *замкнутый диск* (шар) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0$;
- $S^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : d_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\}$ — n-мерная *сфера* радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0$;
- $D^n = D^n_1(\mathbf{0})$, $\overline{D}^n = \overline{D}^n_1(\mathbf{0})$, $S^{n-1} = S^{n-1}_1(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$;
- $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ раз}}$ — n-мерный *тор*.

6. Ниже перечислены наборы топологических пространств. Покажите, что пространства из каждого набора гомеоморфны друг другу, а пространства из разных наборов — нет:
   а) любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$, и любой диск $\overline{D}^1_r(c)$, где $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}$;
   б) любые полуоткрытые интервалы и лучи $[a, b), (a, b], (-\infty, c], [c, \infty) \subset \mathbb{R}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$;
   в) любой открытый интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, где $a < b$, любые открытые лучи $(-\infty, c), (c, \infty) \subset \mathbb{R}$, прямая $\mathbb{R}$ и окружность S^1 без точки;
   г) проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ без точки и открытый (без граничной окружности) лист Мёбиуса с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^3$;
   д) открытое плоское кольцо $D^2_2(\mathbf{0}) \setminus \overline{D}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ и плоскость $\mathbb{R}^2$ без точки (*подсказка:* чтобы доказать, что пространства из набора д) не гомеоморфны пространствам из набора г), рассмотрите одноточечные компактификации этих пространств);
   е) тор T^2 и поверхность в $\mathbb{R}^3$, получаемая вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её;
   ж) сфера S^n без точки, пространство $\mathbb{R}^n$ и диск D^n для произвольного $n \geqslant 2$;
   з) $\overline{D}^{2k}$, $\underbrace{\overline{D}^2 \times \ldots \times \overline{D}^2}_{k \text{ раз}}$ и $S^{2k} \setminus U$, где $k \geqslant 1$ и U — ε-окрестность произвольной точки $\mathbf{x} \in S^{2k}$ для любого $\varepsilon < 1$.

7. Вложите $S^1 \times \overline{D}^2$, $T^2 \times \overline{D}^1$ и $S^2 \times \overline{D}^1$ в $\mathbb{R}^3$. Вложите тор T^n в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого натурального n.

8. Докажите, что канторово множество $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно произведению $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией. (*Подсказка:* рассмотрите отображение $f\colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to C$, определённое правилом $f\big((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n}$.)

9. Докажите, что всякое сепарабельное метризуемое пространство X, обладающее базой из открыто-замкнутых множеств, гомеоморфно вкладывается в канторово множество $C \subset \mathbb{R}$. (*Подсказка:* рассмотрите счётную базу $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ пространства X из открыто-замкнутых множеств и постройте вложение X в C с помощью отображений $f_n\colon x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } x \in U_n, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus U_n. \end{cases}$)

10. Докажите, что для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $f(A) = B$. (*Подсказка.* Как-нибудь занумеруйте элементы A и B: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots\}$. Определите $f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, индукцией по n, положив $f(a_1) = b_1$ и выбирая в качестве $f(a_n)$ точку b_k с наименьшим возможным номером k так, чтобы выполнялось условие $a_i < a_j \Leftrightarrow f(a_i) < f(a_j)$ для $i, j \leqslant n$. Затем продолжите f на $\mathbb{R}$ по монотонности.)

11. Докажите, что любое счётное метризуемое пространство вкладывается в пространство $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел. (*Подсказка:* заметьте, что любое счётное метризуемое пространство X гомеоморфно подпространству Y прямой, поскольку метрика на X принимает лишь счётное число значений и, значит, X обладает (счётной) базой из открыто-замкнутых множеств; затем примените утверждение предыдущей задачи к $Y \cup \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$.)