Непрерывные отображения

1. Проверьте, что для отображения $f\colon X\to Y$ топологических пространств следующие условия равносильны:
   а) прообраз любого открытого подмножества Y открыт в X (т.е. f непрерывно);
   б) прообраз любого замкнутого подмножества Y замкнут в X;
   в) для любой точки $x\in X$ прообраз любой окрестности $f(x)$ в Y содержит окрестность точки x в X;
   г) существует предбаза топологии Y, прообраз любого элемента которой открыт в X;
   д) для любого множества $A\subset X$ образ замыкания A в X содержится в замыкании $f(A)$ в Y;
   е) для любого множества $B\subset Y$ замыкание $f^{-1}(B)$ в X содержится в прообразе замыкания B в Y;
   ж) если A — направленное множество и направленность $\varphi\colon A\to X$ сходится в X, то направленность $f\circ\varphi\colon A\to Y$ сходится в Y (иными словами, образ $\big(f(x_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$ любой сходящейся направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в X сходится в Y).
2. Покажите, что отображение $f\colon X\to Y$ топологических (метризуемых) пространств
   а) непрерывно в точке $x\in X$, если и только если для любой сходящейся к x направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ (последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) в X направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ (последовательность $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$) в Y сходится к $f(x)$;
   б) непрерывно, если и только если для любой сходящейся к некоторой точке направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ (последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) в X направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ (последовательность $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$) в Y сходится к некоторой точке.
3. Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на множестве X. Говорят, что $\mathscr{U}$ *сходится к точке* $x\in X$, если любая окрестность x принадлежит $\mathscr{U}$, и просто *сходится*, если он сходится к некоторой точке. Для фильтра $\mathscr{F}$ на множестве X и любого отображения $f\colon X\to Y$ полагаем $\overline{f}(\mathscr{F})=\{A\subset Y : f^{-1}(A)\in\mathscr{F}\}$ (если f сюръективно, то, очевидно, $\overline{f}=\{f(F) : F\in\mathscr{F}\}$). Проверьте, что если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на X, то $\overline{f}(\mathscr{U})$ — ультрафильтр на Y.

   Докажите, что отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств
   а) непрерывно в точке x, если и только если для любого сходящегося к x ультрафильтра $\mathscr{U}$ на X ультрафильтр $\overline{f}(\mathscr{U})$ на Y сходится к $f(x)$;
   б) непрерывно, если и только если образ $\overline{f}(\mathscr{U})$ любого сходящегося ультрафильтра $\mathscr{U}$ на X сходится на Y.
4. а) Пусть $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ — отображения топологических пространств. Проверьте, что если f и g непрерывны, то композиция $g\circ f$, т.е. отображение $X\to Z$, определённое правилом $x\mapsto g(f(x))$, непрерывна. Верно ли обратное?
   б) Пусть $f\colon X\to Y$ и $g\colon X\to Z$ — отображения топологических пространств. Проверьте, что если f и g непрерывны, то диагональ $f\triangle g$, т.е. отображение $X\to Y\times Z$, определённое правилом $x\mapsto (f(x),g(x))$, непрерывна. Верно ли обратное?
   в) Пусть $f\colon X\to Y$ — отображение топологических пространств, $A\subset X$, $B\subset Y$ и $f(A)\subset B$. Проверьте, что если f непрерывно, то сужение $f|_A\colon A\to B$, т.е. отображение $A\to B$, определённое правилом $x\mapsto f(x)$ для $x\in A$, непрерывно. Верно ли обратное?
5. *Графиком* отображения $f\colon X\to Y$ называется множество $\mathrm{Gr}(f)=\{(x,y) : x\in X,\ y=f(x)\}\subset X\times Y$. Пусть X и Y — топологические пространства, причём Y хаусдорфово. Докажите, что если отображение $f\colon X\to Y$ непрерывно, то график $\mathrm{Gr}(f)$ замкнут в $X\times Y$. Верно ли обратное?
6. Пусть X — топологическое пространство и $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ — непрерывные функции. Проверьте, что функции $X\to\mathbb{R}$, определённые правилами
$$x\mapsto f(x){+}g(x),\ \ x\mapsto f(x){-}g(x),\ \ x\mapsto f(x){\cdot}g(x),\ \ x\mapsto|f(x)|,\ \ x\mapsto\max\{f(x),g(x)\},\ \ x\mapsto\min\{f(x),g(x)\},$$
   а также функция $x\mapsto\frac{f(x)}{g(x)}$ при условии $0\notin g(X)$, непрерывны.
7. Пусть X и Y — топологические пространства, Y хаусдорфово и $f,g\colon X\to Y$ — непрерывные отображения.
   а) Докажите, что множество $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ точек совпадения отображений f и g замкнуто в X.
   б) Докажите, что если $Z\subset X$ всюду плотно в X и $f(x)=g(x)$ для всех $x\in Z$, то $f(x)=g(x)$ для всех $x\in X$.
8. Пусть X — хаусдорфово пространство и $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение. Докажите, что множество $\mathrm{Fix}\,f=\{x\in X : f(x)=x\}$ неподвижных точек отображения f замкнуто в X.
9. Докажите, что любая метрика, порождающая топологию метризуемого пространства X, непрерывна как отображение $X\times X\to\mathbb{R}$.
10. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Расстояние $d(A,B)$ между множествами $A,B\subset X$ определяется формулой $d(A,B)=\inf\{d(x,y) : x\in A,\ y\in B\}$. Докажите, что для любого фиксированного $A\subset X$ функция $d_A\colon X\to\mathbb{R}$, определённая правилом $d_A(x)=d(\{x\},A)$, непрерывна. Выведите отсюда, что если множества $A,B\subset X$ замкнуты и не пересекаются, то A и B *функционально отделимы*, т.е. существует непрерывная функция $f\colon X\to[0,1]$ такая, что $f(A)\subset\{0\}$ и $f(B)\subset\{1\}$. Приведите пример непересекающихся замкнутых множеств A и B в метрическом пространстве, расстояние между которыми равно нулю.
11. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $A\subset X$ — его замкнутое подпространство и $f\colon A\to[0,1]$ — непрерывная функция. Постройте в явном виде непрерывное продолжение функции f на X.
12. Отображение $f\colon(X,d)\to(Y,\rho)$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует число L (*константа Липшица* отображения f) такое, что $\rho(f(x),f(y))\leqslant L\cdot d(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$. Покажите, что всякое липшицево отображение метрических пространств непрерывно.
13. Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ называется *открытым* (*замкнутым*), если образ всякого открытого (замкнутого) подмножества X открыт (замкнут). Приведите примеры, попарно различающие классы непрерывных, открытых и замкнутых отображений.
14. Непрерывное отображение $r\colon X\to X$ называется *ретракцией*, если $r\circ r=r$. Множество $Y\subset X$ называется *ретрактом* пространства X, если существует ретракция $r\colon X\to X$, для которой $Y=r(X)$. Докажите, что
    а) всякий ретракт хаусдорфова пространства замкнут;
    б) $r\colon X\to X$ — ретракция и $Y=r(X)$, если и только если сужение $r|_Y\colon Y\to Y$ есть тождественное отображение;
    в) подпространство Y топологического пространства X является ретрактом X тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение Y в любое топологическое пространство Z продолжается до непрерывного отображения $X\to Z$.
15. Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное сюръективное отображение и X а) удовлетворяет одной из аксиом отделимости T_i, $i=0,1,2,3,3\frac{1}{2}$; б) нормально; в) удовлетворяет первой аксиоме счётности; г) удовлетворяет второй аксиоме счётности; д) метризуемо; е) сепарабельно; ё) является пространством Фреше–Урысона; ж) обладает свойством Суслина (т.е. любое семейство непустых попарно непересекающихся множеств в X счётно). Верно ли, что Y тоже обладает этим свойством? верно ли это при дополнительном предположении, что Y метризуемо?