Подпространства

1. Пусть X — топологическое пространство и Y — его подпространство. Покажите, что замыкание любого множества $A \subset Y$ в пространстве Y равно пересечению замыкания A в X с множеством Y.

2. Пусть Y — всюду плотное подпространство топологического пространства X. Докажите, что если U открыто в X, то $\overline{U} = \overline{U \cap Y}$.

3. Приведите пример недискретного пространства, в котором все счётные подмножества замкнуты.

4. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\mathscr{T}_d$ — топология на X, порождённая метрикой d, и $Y \subset X$. Для любых $x, y \in Y$ положим $d_Y(x, y) = d(x, y)$. Проверьте, что функция $d_Y \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ является метрикой на Y и что топологическое пространство Y с порождённой ею топологией является подпространством пространства $(X, \mathscr{T}_d)$.

5. Пусть $(X, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество, $\mathscr{T}_{\leqslant}$ — топология линейного порядка на X (напомним, что её базу составляют все множества вида $\{x \in X : x < a\}$, $\{x \in X : a < x < b\}$ и $\{x \in X : a < x\}$, где a и b — всевозможные точки из X) и $Y \subset X$. Для любых $x, y \in Y$ положим $x \leqslant_Y y \Leftrightarrow x \leqslant y$ (иными словами, $\leqslant_Y = \leqslant \cap (Y \times Y)$). Проверьте, что $\leqslant_Y$ есть линейный порядок на Y. Является ли топологическое пространство Y с порождённой этим порядком топологией линейного порядка подпространством пространства $(X, \mathscr{T}_{\leqslant})$?

6. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Говорят, что Y — множество *типа* G_δ, или G_δ*-множество*, в X, если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств.
   а) Покажите, что любое подмножество пространства X, которое является прообразом нуля при непрерывном отображении $X \to \mathbb{R}$ (такие подмножества называют *функционально замкнутыми*), имеет тип G_δ.
   б) Заметьте, что в метризуемом пространстве все замкнутые множества имеют тип G_δ.
   в) Верно ли, что все замкнутые подмножества нормального пространства имеют тип G_δ?
   г) Докажите, что каждое замкнутое G_δ-множество в нормальном пространстве X функционально замкнуто. Верно ли это для тихоновских пространств?
   д) Верно ли, что каждая G_δ-точка в тихоновском пространстве X является прообразом нуля при непрерывном отображении $X \to \mathbb{R}$?
   е) Приведите пример тихоновского пространства, в котором нет нетривиальных сходящихся последовательностей, однако все точки имеют тип G_δ.
   ж) Является ли множество всех рациональных чисел G_δ-подмножеством вещественной прямой с обычной топологией? Является ли таковым множество всех иррациональных чисел?

7. Полуоткрытый интервал $[0, 1)$ с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in [0, 1)\}$, называется *стрелкой Зоргенфрея*. Докажите, что стрелка Зоргенфрея S наследственно сепарабельна и наследственно нормальна, т.е. любое её подпространство сепарабельно и нормально. Покажите, что квадрат стрелки $S \times S$ с топологией произведения сепарабелен, но содержит замкнутое дискретное подпространство мощности $2^{\aleph_0}$ (и потому не нормален и не наследственно сепарабелен).

8. Пусть $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией (её базу образуют все множества вида $\{\alpha \leqslant \omega_1 : \alpha < \alpha_0\}$, $\{\alpha \leqslant \omega_1 : \alpha_0 < \alpha < \beta_0\}$ и $\{\alpha \leqslant \omega_1 : \alpha_0 < \alpha\}$, где $\alpha_0, \beta_0 \leqslant \omega_1$), и пусть $W_0 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega\}$ — множество всех конечных ординалов вместе с первым бесконечным с той же топологией (т.е. W_0 — сходящаяся последовательность). Докажите, что пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не нормально, однако все замкнутые дискретные множества в нём конечны. Пространство $W_1 \times W_0$ называется *плоскостью Тихонова*.

9. Докажите, что для T_1-пространства X следующие условия равносильны:
   - X наследственно нормально;
   - все открытые подпространства X нормальны;
   - любые два множества $A, B \subset X$, отделённые в X (т.е. такие, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$), отделены окрестностями (т.е. существуют непересекающиеся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$).

10. Пусть X — пространство. Рассмотрим множество $A(X) = X \times \{0, 1\}$ (т.е. объединение двух копий X). На $A(X)$ введём топологию, объявив все точки второй копии $X \times \{1\}$ изолированными и определив базу окрестностей любой точки $(x, 0) \in X \times \{0\}$ первой копии как $\bigl\{U \times \{0\} \cup (U \times \{1\} \setminus \{(x, 1)\}) : \ U — \text{окрестность } x \text{ в } X\bigr\}$. Такая процедура называется *удвоением пространства X по Александрову*. Заметьте, что $A(X)$ содержит X и дискретное пространство мощности $|X|$ в качестве подпространств. Покажите, что если X хаусдорфово, то $A(X)$ тоже хаусдорфово, и если X — компакт, то $A(X)$ — тоже компакт.

11. а) Докажите, что множество $C([0, 1])$ непрерывных функций на отрезке с топологией равномерной сходимости (которая порождена метрикой $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$) сепарабельно. Выведите отсюда, что $C_p([0, 1])$ (это то же самое множество, но с топологией поточечной сходимости, которая индуцирована из тихоновской топологии произведения $\mathbb{R}^{[0,1]} \supset C([0, 1])$) тоже сепарабельно.
    б) Докажите, что тихоновский куб $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$ сепарабелен, показав, что подпространство $C_p([0, 1])$ всюду плотно в $\mathbb{R}^{[0,1]}$ и $\mathbb{R}^{[0,1]}$ гомеоморфно всюду плотному подпространству куба $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$.

12. Топологическое пространство обладает *свойством Суслина*, если каждое семейство непустых попарно непересекающихся открытых множеств в этом пространстве счётно.
    а) Проверьте, что всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.
    б) Приведите пример несепарабельного пространства со свойством Суслина.
    в) Покажите, что свойство Суслина и сепарабельность наследуются открытыми подпространствами.
    г) Покажите, что свойство Суслина наследуется всюду плотными подпространствами, а сепарабельность не наследуется. (*Подсказка*: В тихоновском кубе $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$ рассмотрите множество точек, имеющих лишь конечное число ненулевых координат.)

13. Докажите, что в классе метризуемых пространств нормальность, сепарабельность и свойство Суслина являются наследственными свойствами. (*Подсказка*: Для метризуемых пространств сепарабельность и свойство Суслина равносильны наличию счётной базы. Чтобы доказать, что метрическое пространство со свойством Суслина сепарабельно, для каждого n рассмотрите максимальное множество точек, попарные расстояния между которыми $\geqslant \frac{1}{n}$, и покажите, что объединение этих множеств всюду плотно.)