Последовательности и направленности

Отношение $\leqslant$ на множестве A называется *направлением* (вверх), если оно рефлексивно ($a \leqslant a \ \forall a \in A$), транзитивно $\big((a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \to (a \leqslant c)\big)$ и обладает тем свойством, что у любой пары элементов A есть верхняя грань, т.е. для любых $a, b \in A$ существует $c \in A$ такое, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Пара $(A, \leqslant)$, где A — множество и $\leqslant$ — отношение направления, называется *направленным* (вверх) множеством. Пример направленного множества — множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с естественным порядком. Любое отображение $f\colon A \to X$, где A — направленность и X — множество, называется *направленностью* в X. Обычно направленности записываются как $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ или просто (x_α) (где $x_\alpha = f(\alpha)$ для $\alpha \in A$). В частном случае, когда $(A, \leqslant)$ — это $\mathbb{N}$ с естественным порядком, получается определение *последовательности* в X (или *последовательности точек* X). Множество $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ значений направленности не следует путать с самой направленностью. Например, для бесконечной последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $a_i = a_j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$, множество значений одноточечно.

Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \preccurlyeq)$ — направленные множества. Направленность $(y_\beta)_{\beta \in B}$ в X называется *поднаправленностью* направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в том же множестве X, если существует отображение $\varphi\colon B \to A$, удовлетворяющее условиям: $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ для всякого $\beta \in B$ и для каждого $\alpha_0 \in A$ найдётся $\beta_0 \in B$ такое, что $\varphi(\beta) \geqslant \alpha_0$ при всех $\beta \succcurlyeq \beta_0$. В определении подпоследовательности дополнительно требуется инъективность отображения φ: подпоследовательность данной последовательности (x_n) получается из (x_n) вычёркиванием некоторых членов, причём бесконечное число членов должно остаться невычеркнутым. Формально: последовательность $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в X называется *подпоследовательностью* последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, если существует строго возрастающая функция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $y_n = x_{\varphi(n)}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Подпоследовательность обычно записывается как $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (подразумевается, что $n_k = \varphi(k)$).

Направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в топологическом пространстве X *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $x_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. В этом случае говорят, что точка x является *пределом* направленности (x_α) и пишут $x_\alpha \underset{A}{\to} x$ или $x = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ (или — в нехаусдорфовом пространстве — $x \in \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$). Для последовательности определения те же; они согласуются с обычными определениями сходимости и предела числовой последовательности.

Точка x топологического пространства X называется *предельной точкой направленности* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в X, если для любой окрестности U этой точки и любого $\alpha_0 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $x_\alpha \in U$. Для последовательности определение то же. Предельные точки последовательности часто называют *точками накопления последовательности.*

1. Покажите, что каждая последовательность имеет поднаправленность, которая не является последовательностью.

2. Покажите, что в T_1-пространстве предельные точки последовательности с бесконечным множеством значений — это в точности предельные точки множества её значений. Что, если пространство не удовлетворяет аксиоме T_1 или множество значений последовательности конечно?

3. а) Докажите, что x — точка прикосновения множества Y в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда к этой точке сходится некоторая направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha \in Y$ для $\alpha \in A$.
   б) Покажите, что в утверждении пункта а) «направленность» нельзя заменить на «последовательность».

4. а) Докажите, что точка топологического пространства является предельной точкой некоторой направленности тогда и только тогда, когда к этой точке сходится некоторая поднаправленность данной направленности.
   б) Можно ли в утверждении пункта а) заменить «направленность» на «последовательность»?

5. Докажите, что топологическое пространство хаусдорфово тогда и только тогда, когда в нём каждая сходящаяся направленность имеет ровно один предел. Можно ли заменить «направленность» на «последовательность»?

6. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона*, если к любой точке прикосновения x любого множества $A \subset X$ сходится некоторая последовательность точек A (иными словами, если точка $x \notin A$ предельна для множества A тогда и только тогда, когда к x сходится некоторая последовательность точек A).
   а) Покажите, что каждое пространство с первой аксиомой счётности является пространством Фреше–Урысона.
   б) Пусть $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \mathbb{N}$ и $\mathscr{T}$ — топология на X, в которой все точки $\left(\frac{1}{n}, k\right)$, $n, k \in \mathbb{N}$, изолированы, а базу окрестностей точки 0 составляют всевозможные множества вида $\{0\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right) : n, k \in \mathbb{N},\ n > n_k\right\}$, где $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — любая последовательность натуральных чисел. Топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ называется *веером Фреше–Урысона.* Докажите, что веер Фреше–Урысона является пространством Фреше–Урысона, но не удовлетворяет первой аксиоме счётности.
   в) Приведите пример топологического пространства, которое не является пространством Фреше–Урысона (ср. с задачей 3 б)). Может ли такое пространство быть счётным?