Топология, база и предбаза, аксиомы отделимости

1. Проверьте, что семейство $\mathscr{B}$ открытых подмножеств топологического пространства X является базой топологии этого пространства тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся $V \in \mathscr{B}$ с тем свойством, что $x \in V \subset U$. (Напомним, что *база* — это семейство открытых множеств с тем свойством, что любое открытое множество является объединением элементов этого семейства.)
2. Пусть X — множество. Покажите, что семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ является *предбазой* некоторой топологии на X (т.е. семейство всех конечных пересечений его элементов является базой некоторой топологии) тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathscr{B} = X$. Каково необходимое и достаточное условие того, что $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии на X?
3. Докажите, что если топологическое пространство обладает счётной базой, то любая его база содержит счётное подсемейство, являющееся базой. Верно ли аналогичное утверждение для локальных баз? предбаз?
4. Покажите, что на любом множестве, содержащем хотя бы две точки, существуют несравнимые (по включению) топологии. При каком условии на множестве существуют несравнимые топологии, удовлетворяющие аксиоме отделимости T_0? T_1? T_2? T_3? T_4?
5.
   а) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 тогда и только тогда, когда для любых двух различных точек x и y в нём выполнено условие $\overline{\{x\}} \cap \{y\} = \varnothing$ или $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$. (Черта сверху обозначает замыкание.)

   б) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 тогда и только тогда, когда любое непустое антидискретное подпространство в нём одноточечно.

   в) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 тогда и только тогда, когда для любых двух различных точек x и y в нём выполнено условие $\overline{\{x\}} \cap \{y\} = \{x\} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$.

   г) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1 тогда и только тогда, когда все точки (точнее, одноточечные подмножества) в нём замкнуты.

   д) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1 тогда и только тогда, когда все его конечные подпространства дискретны.

   е) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1 тогда и только тогда, когда пересечение всех окрестностей любой точки x в нём есть $\{x\}$.

   ж) Покажите, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_2 тогда и только тогда, когда пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x в нём есть $\{x\}$.

   з) Покажите, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_3 тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся окрестность V точки x, замыкание которой содержится в U.

   и) Покажите, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_4 тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся окрестность V множества F, замыкание которой содержится в U.
6. Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно удовлетворяет аксиомам T_1 и T_3, и *нормальным*, если оно удовлетворяет аксиомам T_1 и T_4. Можно ли заменить аксиому T_1 на T_0 в этих определениях? Приведите примеры нерегулярного T_3-пространства, ненормального T_4-пространства и T_4-пространства, которое не удовлетворяет аксиоме T_3.
7. Заметьте, что нормальность $\Rightarrow$ регулярность $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Приведите примеры (а) топологического пространства, не являющегося T_0-пространством, (б) T_0-пространства, не являющегося T_1-пространством, (в) нехаусдорфова T_1-пространства, (г) нерегулярного хаусдорфова пространства и (д) ненормального регулярного пространства.
8. Докажите, что всякое метризуемое пространство нормально. (*Подсказка*: для данных непересекающихся замкнутых множеств придумайте непрерывную функцию, которая принимает значение 0 на одном из этих множеств и 1 на другом.)
9. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, если система окрестностей каждой её точки обладает счётной базой (иными словами, в каждой точке имеется счётная локальная база топологии), и *второй аксиоме счётности*, если вся его топология обладает счётной базой.
   а) Покажите, что всякое метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.
   б) Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности.
   в) Приведите пример топологического пространства без первой аксиомы счётности.
   г) Приведите пример регулярного неметризуемого пространства с первой аксиомой счётности.
10. Укажите подмножества A и B вещественной прямой с обычной топологией, для которых (а) $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$; (б) $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \neq \operatorname{Int}(A \cup B)$. Может ли одно из этих множеств быть замкнутым? открытым?
11. Для каких множеств внутренность совпадает с замыканием? Опишите все такие подмножества прямой $\mathbb{R}$.
12. а) В теории множеств *фильтром* на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, удовлетворяющее двум условиям: (1) если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (и, следовательно, $A \cap B \neq \varnothing$); (2) если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. Фильтр $\mathscr{F}$ называется *свободным*, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. (Покажите, что свободные фильтры существуют только на бесконечных множествах и что минимальный (по включению) свободный фильтр на бесконечном множестве X — это *фильтр Фреше*, т.е. семейство всех дополнений до конечных множеств.) Заметьте, что семейство всех (не обязательно открытых!) окрестностей любой точки x в топологическом пространстве $(X, \mathscr{T})$, равно как и семейство всех проколотых окрестностей любой точки, образует фильтр на X, и наоборот: любой фильтр на множестве X является фильтром проколотых окрестностей некоторой точки $x \in X$ в некоторой топологии. (Таким образом, слова «фильтр» и «система проколотых окрестностей точки» означают одно и то же, но на разных языках.) В T_1-пространстве все фильтры проколотых окрестностей точек свободны. *База фильтра* — то же самое, что и база (проколотых) окрестностей: $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является базой фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

    Максимальный (по включению) фильтр называется *ультрафильтром*. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X называется *главным*, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$, т.е. существует точка $x_0 \in X$, для которой $\mathscr{U} = \{A \subset X : x_0 \in A\}$; неглавные ультрафильтры — это в точности те ультрафильтры, которые являются свободными фильтрами, т.е. содержат фильтр Фреше. Докажите (с помощью леммы Цорна) существование неглавного ультрафильтра на любом бесконечном множестве. Проверьте, что фильтр $\mathscr{F}$ на X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

    б) Приведите пример счётного топологического пространства без первой аксиомы счётности. (Заметьте, что такое пространство неметризуемо.)