Метрические пространства

1. Проверьте, что пары (X, d) являются метрическими пространствами:

   а) X — любое векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $d(x,y) = \|(x-y)\|$;

   б) X — любое векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $d(x,y) = \sqrt{(x-y,x-y)}$;

   в) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция;

   г) $X = \{0\} \cup (0,1] \times \kappa)$, где κ — любой кардинал (т.е. X представляет собой объединение κ копий обычного единичного отрезка $[0,1]$, «склеенных» в точке 0), а функция d определена так: $d(0,0) = 0$, $d(0,(x,\alpha)) = x$ для любого $\alpha \in \kappa$, $d((x,\alpha),(y,\alpha)) = |x-y|$ для любого $\alpha \in \kappa$ и $d((x,\alpha),(y,\beta)) = x+y$ для $\alpha, \beta \in \kappa$, $\alpha \neq \beta$. (Такое пространство (X,d) называется *метрическим ежом колючести* κ.)

2. Две метрики d и ρ на одном и том же множестве X называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию, и *липшицево эквивалентными*, если существуют положительные числа c и C такие, что $cd(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant Cd(x,y)$ для любых $x, y \in X$ (заметьте, что нормы с аналогичным свойством называются просто эквивалентными). Приведите пример эквивалентных не липшицево эквивалентных метрик.

3. Покажите, что функции $d_1, d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определённые правилами $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{i \leqslant n} |x_i - y_i|$ и $d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i \leqslant n} |x_i - y_i|$ для $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n), \mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, являются метриками на $\mathbb{R}^n$. Эквивалентны ли эти метрики друг другу и обычной метрике $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} |x_i - y_i|^2}$ на $\mathbb{R}^n$ (порождённой скалярным произведением)? Нарисуйте шары относительно этих метрик для случая $n = 2$.

4. Пусть $\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство (его точками служат все проходящие через $\mathbf{0} = \underbrace{(0,\dots,0)}_{n+1 \text{ раз}}$ прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$). Проверьте, что величину угла между прямыми можно принять за расстояние в $\mathbb{P}^n$, т.е. функция $d_n\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}$, определённая правилом $d_n(l_1,l_2) = (\widehat{l_1,l_2})$ для $l_1, l_2 \in \mathbb{P}^n$, является метрикой на $\mathbb{P}^n$.

5. Могут ли в метрическом пространстве существовать два несовпадающих шара разных радиусов таких, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса?

6. Метрика d на множестве X называется *неархимедовой* метрикой, или *ультраметрикой*, если она удовлетворяет сильному неравенству треугольника, т.е. $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ для любых $x,y,z \in X$. Проверьте, что дискретная метрика неархимедова. Покажите, что в ультраметрическом пространстве
   а) любая точка любого шара (т.е. множества вида $\{x : d(x,x_0) < \varepsilon\}$ или $\{x : d(x,x_0) \leqslant \varepsilon\}$, где $x_0 \in X$ — центр шара и $\varepsilon > 0$) является центром этого шара;
   б) если два шара пересекаются, то один из них целиком содержится в другом;
   в) всякий шар одновременно и открыт, и замкнут;
   г) все сферы (множества вида $\{x : d(x,x_0) = \varepsilon\}$) открыты;
   д) все треугольники равнобедренны.

7. Может ли шар меньшего радиуса содержать шар большего радиуса в ультраметрическом пространстве?

8. Пусть p — простое число. На множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел следующим образом определяется *p-адическая норма* $|\cdot|_p$. Во-первых, $|0|_p = 0$. Если $r \in \mathbb{Q}$ не равно нулю, то оно представимо в виде $p^n \frac{a}{b}$, где a, b и n — целые (не обязательно положительные!) числа, причём a и b не делятся на p. Норма $|r|_p$ полагается равной p^{-n}. Проверьте, что $|\cdot|_p$ — действительно норма, и что порождаемая ею метрика неархимедова. Эквивалентна ли она обычной метрике $d(x,y) = |x-y|$ на $\mathbb{Q}$?

9. Пусть X — множество, d — метрика на нём, a — любое положительное число, $\mathbf{a}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная a, и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция со свойствами $f(0) = 0$ и $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Проверьте, что $a \cdot d$, $\min\{d, \mathbf{a}\}$, $f \circ d$ и $\frac{d}{1+d}$ — тоже метрики. Эквивалентны ли они друг другу и метрике d?

10. Пусть X — множество и d и ρ — две метрики на нём. Какие из функций $\max\{d,\rho\}$, $\min\{d,\rho\}$, $d + \rho$, $d \cdot \rho$ и $\frac{d}{\rho}$ тоже являются метриками? (В последнем случае полагаем $\frac{d}{\rho}(x,x) = 0$ для $x \in X$.)

11. Покажите, что формулы $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$ и $\rho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt}$ определяют неэквивалентные метрики на пространстве $C([0,1])$ непрерывных функций на отрезке. (Ср. с задачей 3.)

12. Докажите, что точка x метрического пространства (X,d) является точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда $d(x,A) = 0$. Выведите отсюда, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $y \notin A$ имеем $d(y,A) > 0$.

13. Топологическое пространство *метризуемо*, если его топология порождается некоторой метрикой. Покажите, что всякое метризуемое топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

14. Докажите, что всякое метризуемое топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ является *пространством Фреше–Урысона*, т.е. точка $x \in X$ является точкой прикосновения для множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда к x сходится (в топологии $\mathscr{T}$) некоторая последовательность точек множества A.

15. Докажите, что две метрики на множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда любая последовательность точек этого множества, сходящаяся по одной метрике, сходится и по другой.