

Множества

1. Докажите, что для любых множеств X и Y

$$X \cap \bigcup_{Z \in Y} Z = \bigcup_{Z \in Y} (X \cap Z) \quad \text{и} \quad X \cup \bigcap_{Z \in Y} Z = \bigcap_{Z \in Y} (X \cup Z).$$

2. Проверьте, какие из следующих дистрибутивностей верны:

а) $(X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z);$ в) $(X \cap Y) \Delta Z = (X \Delta Z) \cap (Y \Delta Z);$

б) $(X \Delta Y) \cup Z = (X \cup Z) \Delta (Y \cup Z);$ г) $(X \cup Y) \Delta Z = (X \Delta Z) \cup (Y \Delta Z).$

3. Докажите, что для любых множеств X и Y

$$X \setminus \bigcup_{Z \in Y} Z = \bigcap_{Z \in Y} (X \setminus Z) \quad \text{и} \quad X \setminus \bigcap_{Z \in Y} Z = \bigcup_{Z \in Y} (X \setminus Z)$$

(эти формулы называются *законами де Моргана*).

4. Проверьте, что для любых множеств $X_1 \subset X_2 \subset X$ и $Y_1 \subset Y_2 \subset Y$ и любого отображения $f: X \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} f(X_1) \subset f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \setminus X_2) \supset f(X_1) \setminus f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \Delta X_2) \supset f(X_1) \Delta f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \Delta Y_2) = f^{-1}(Y_1) \Delta f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Как изменятся эти формулы для инъективных, сюръективных и биективных отображений?

5. Докажите *теорему Кёнига*: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$ X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора ($\kappa < 2^\kappa$).

6. а) Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\aleph_0}$ всех его конечных подмножеств.
 б) Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству $[X]^{\aleph_0}$ всех его счётных подмножеств?
 в) Верно ли, что в предположении справедливости континуум-гипотезы любое несчётное множество равномощно множеству $[X]^{\aleph_0}$ всех его счётных подмножеств? (*Подсказка*: рассмотрите кардинал \aleph_ω и примените теорему Кёнига.)
7. Пусть κ и λ — кардиналы, X и Y — непересекающиеся множества, $|X| = \kappa$ и $|Y| = \lambda$. Сумма $\kappa + \lambda$ кардиналов κ и λ определяется как мощность множества $X \cup Y$, их *произведение* $\kappa \cdot \lambda$ — как мощность множества $X \times Y$, а λ -я *степень* κ^λ кардинала κ определяется как мощность множества $X^Y = \{f: Y \rightarrow X\}$. (Заметьте, что для каждого множества A существует ровно одно отображение $f: \emptyset \rightarrow A$ с пустой областью определения (это пустое множество), так что $\kappa^0 = 1$ для любого кардинала κ .) Проверьте следующие свойства этих операций (ниже κ , λ и μ — кардиналы):

а) ассоциативность сложения и умножения: $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu);$

б) коммутативность сложения и умножения: $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa;$

в) дистрибутивность умножения относительно сложения: $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu;$

г) монотонность: если $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;
 если $1 \leq \kappa$ и $\lambda \leq \mu$, то $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$;

д) $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu, \quad \kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, \quad (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu;$

е) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\};$$

ё) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq 1$, то

$$\max\{\kappa, 2^\lambda\} \leq \kappa^\lambda \leq \max\{2^\kappa, 2^\lambda\};$$

в частности, если λ бесконечен, то $m^\lambda = n^\lambda$ для любых натуральных m и n .