Несколько последних простых задач
(в помощь при подготовке к экзамену)

1. Покажите, что если композиция $f \circ g$ двух непрерывных отображений факторна, то g факторно.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств *открыто* (*замкнуто*), если $f(A)$ открыто (замкнуто) в Y для любого открытого (замкнутого) в X множества $A \subset X$.

2. а) Покажите, что всякое открытое сюръективное отображение факторно. Приведите пример факторного не открытого отображения. (*Подсказка:* годится, например, отображение суммы бесконечного числа копий обычного отрезка, стягивающее в одну точку все левые концы этих отрезков.)
   б) Покажите, что всякое замкнутое сюръективное отображение факторно. Приведите пример факторного не замкнутого отображения. (*Подсказка:* Один из возможных примеров — проектирование плоскости (квадрата вещественной прямой) на прямую. Это отображение открыто, а значит, и факторно, но не замкнуто — достаточно рассмотреть проекцию гиперболы.)
3. Покажите, что взаимно однозначное факторное отображение является гомеоморфизмом.

Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to X$, для которого $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (такое отображение называется *путём*, соединяющим точки x и y. Топологическое пространство X называется *локально связным*, если у любой точки $x \in X$ есть связная окрестность.

4. а) Докажите, что любое линейно связное пространство связно.
   б) Приведите пример локально связного несвязного пространства.
5. Приведите пример связного, но не линейно связного и не локально связного пространства. (*Подсказка:* рассмотрите график функции $\sin\frac{1}{x}$ на $(0,1]$, объединённый с отрезком $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1,1]\}$.)
6. Покажите, что нульмерность и сильная нульмерность сохраняются открыто-замкнутыми отображениями (т.е. непрерывными отображениями, переводящими открыто-замкнутые множества в открыто-замкнутые).
7. Приведите пример замкнутого отображения сильно нульмерного пространства на связное.
   Подсказка. Рассмотрите канторово множество C (оно сильно нульмерно); заметьте, что каждую точку $x \in C$ можно представить в виде $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$, где $a_n \in \{0,1\}$ для каждого n. Рассмотрите отображение $f\colon C \to [0,1]$, определённое правилом $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$. Покажите, что оно сюръективно и непрерывно, а следовательно, и замкнуто, поскольку C — компакт. (На самом деле f просто «склеивает» концы каждого интервала, выкидываемого в стандартной конструкции C.)
8. Покажите, что $\operatorname{ind}(X) \leqslant \operatorname{Ind}(X)$ для всякого нормального пространства X.
9. а) Покажите, что если X — регулярное пространство и $Y \subset X$, то $\operatorname{ind}(Y) \leqslant \operatorname{ind}(X)$.
   б) Покажите, что если X — нормальное пространство и $Y \subset X$ замкнуто, то $\operatorname{Ind}(Y) \leqslant \operatorname{Ind}(X)$.
   в) Покажите, что если X — топологическое пространство и $Y \subset X$ замкнуто, то $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$.
10. Покажите, что если X — линейно связное пространство и $x_0, x_1 \in X$, то фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна группе $\pi_1(X, x_1)$.