Свойства типа компактности

1. Докажите, что всякое локально компактное пространство является пространством второй категории Бэра.
2. Докажите, что всякое локально компактное хаусдорфово пространство X можно непрерывно взаимно однозначно отобразить на компакт. (*Подсказка.* Выберите любую точку $x \in X$ и объявите её новыми окрестностями дополнения до компактов $K \subset X$. В результате получится более слабая компактная топология на X, а как раз это и требуется.)
3. Докажите, что топологическое пространство счётно компактно тогда и только тогда, когда всякое бесконечное множество в этом пространстве имеет точку накопления. Заметьте, что для T_1-пространства X это условие равносильно тому, что X не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств.
4. а) Докажите, что всякое счётно компактное пространство псевдокомпактно.
   б) Докажите, что всякое нормальное псевдокомпактное пространство счётно компактно.
5. Пространство X называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность точек X содержит сходящуюся подпоследовательность. Заметьте, что всякое секвенциально компактное пространство счётно компактно.
   а) Покажите, что пространство $W_0^1 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ всех не более чем счётных ординалов с топологией порядка секвенциально компактно, но не компактно.
   б) Покажите, что пространство $W^1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ с топологией порядка компактно, но не секвенциально компактно.
6. а) Докажите, что всякий паракомпакт нормален.
   б) Докажите, что всякое линделёфово пространство паракомпактно (и, следовательно, нормально).
   в) Приведите пример паракомпактного не линделёфова пространства.
7. Докажите, что стрелка Зоргенфрея (полуоткрытый интервал $[0, 1)$ с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in [0, 1)\}$) линделёфова, однако квадрат стрелки даже не нормален.
8. Покажите, что локальная компактность и секвенциальная компактность конечно мультипликативны.
9. Покажите, что
   а) плоскость Немыцкого не локально компактна;
   б) зато любая точка плоскости Немыцкого обладает линделёфовой окрестностью;
   в) плоскость Немыцкого L можно расширить до нормального пространства, добавив к ней одну точку (иными словами, существует нормальное пространство X, которое содержит L в качестве подпространства, причём $|X \setminus L| = 1$);
   г) квадрат стрелки Зоргенфрея таким расширением не обладает.
10. Говорят, что семейство множеств *почти дизъюнктно*, если пересечение любых двух множеств из этого семейства конечно. Пусть $\mathscr{A}$ — максимальное (по включению) почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$; существование такого семейства вытекает из леммы Цорна. Рассмотрим одноточечные компактификации $A \cup \{p_A\}$ множеств $A \in \mathscr{A}$ и положим $\Psi(\mathscr{A}) = \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \left(\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}\right)$. Снабдим $\Psi(\mathscr{A})$ топологией, в которой все точки множества $\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\} \subset \mathbb{N}$ изолированы, а базу окрестностей каждой точки p_A образуют множества вида $A \setminus F$, где F конечно (так что, занумеровав произвольным образом элементы A, мы получим последовательность, сходящуюся к p_A в $\Psi(\mathscr{A})$, а множество $P = \{p_A : A \in \mathscr{A}\}$ замкнуто и дискретно в $\Psi(\mathscr{A})$).
    а) Докажите, что пространство $\Psi(\mathscr{A})$ псевдокомпактно и содержит бесконечное замкнутое дискретное (а значит, не псевдокомпактное) подмножество.

    Подсказка. Пусть $f : \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция. Заметьте, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $k_n \in \bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}$ такое, что $f(k_n) > n$. Покажите, что пересечение множества $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ с каждым $A \in \mathscr{A}$ конечно, что противоречит максимальности почти дизъюнктного семейства $\mathscr{A}$.

    б) Покажите, что (i) локальная компактность, (ii) паракомпактность, (iii) линделёфовость, (iv) счётная компактность и (v) секвенциальная компактность наследуются замкнутыми подпространствами.
11. а) Проверьте, что (i) линделёфовость, (ii) счётная компактность, (iii) псевдокомпактность и (iv) секвенциальная компактность сохраняются непрерывными отображениями.
    б) Покажите, что непрерывный образ паракомпактного пространства может не быть паракомпактным.
    в) Покажите, что непрерывный образ локально компактного пространства может не быть локально компактным, однако всякий хаусдорфов образ локально компактного пространства при открытом отображении локально компактен (*открытым* называется непрерывное отображение, при котором образ всякого открытого множества открыт).
12. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:
    а) X обладает счётной базой;
    б) X сепарабельно;
    в) X обладает *свойством Суслина*, т.е. любое семейство непустых попарно непересекающихся открытых подмножеств X не более чем счётно (см. задачу 13 о подпространствах);
    г) X линделёфово. (*Подсказка:* для каждого n рассмотрите счётное покрытие X шарами радиуса $1/n$ и покажите, что вместе эти покрытия образуют базу.)
13. Покажите, что в классе метризуемых пространств компактность, счётная компактность, псевдокомпактность и секвенциальная компактность равносильны.