Нужно определение и свойства 1 и 2
(без доказательства выполнения аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$)

Топологическая алгебра

Топологические группы

Опр. Группа G с топологией $\mathcal{T}$ называется *топологической группой*, если операции $\cdot : G\times G \to G$ (умножения) и $^{-1}: G \to G$ (взятия обратного элемента) непрерывны относительно $\mathcal{T}$. При этом $\mathcal{T}$ называется *групповой топологией*, или топологией, согласованной с групповыми операциями.

Уже из самого существования непрерывных групповых операций вытекают многие свойства $(G, \mathcal{T})$ как топологического пространства. Простейшие такие свойства перечислены ниже.

1. Пространство $(G, \mathcal{T})$ *однородно*, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f: G \to G$ такой, что $f(g) = h$.

   (Действительно, в качестве f можно взять отображение $x \mapsto h\cdot g^{-1}\cdot x$; оно непрерывно в силу непрерывности умножения, и обратное отображение $x \mapsto g\cdot h^{-1}\cdot x$ тоже непрерывно.)

   Простейший пример неоднородного пространства — обычная сходящаяся последовательность (изолированную точку нельзя гомеоморфизмом перевести в предельную). На последовательности нельзя ввести никаких согласованных с топологией групповых операций.

Таким образом, топология любой топологической группы определяется устройством окрестностей единицы в этой группе в том смысле, что любая окрестность любого элемента g группы G есть некоторая окрестность единицы, помноженная на g (или, как говорят, сдвиг на g некоторой окрестности единицы), и наоборот: если $g \in G$ и U — окрестность g, то $g^{-1}U$ — окрестность единицы.

Отметим также, что поскольку $1\cdot 1 = 1$ и умножение непрерывно, для любой окрестности единицы U найдётся окрестность единицы V такая, что $V\cdot V \subset U$;*) кроме того, из непрерывности взятия обратного следует существование окрестности единицы W такой, что $W^{-1} \subset U$.*)

---

*) Как обычно, $A\cdot B = \{a\cdot b : a \in A, b \in B\}$ и $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

2. Если топологическая группа удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, то она удовлетворяет также аксиомам $T_1 - T_{3\frac{1}{2}}$.

Действительно, пусть $g, h \in G$, $g \neq h$, и пусть U — окрестность g, не содержащая h. Тогда gU^{-1} — окрестность 1 (потому что $gU^{-1} = (Ug^{-1})^{-1}$) и $gU^{-1}h$ — окрестность h. Если $g \in gU^{-1}h$, то $g = gu^{-1}h$ для некоторого $u \in U$, откуда $h = u \in U$ — противоречие. Значит, у h есть окрестность, не содержащая g, что доказывает T_1.

Докажем T_2. Пусть V — окрестность единицы, для которой $V \cdot V \subset g^{-1}U$ (она существует, потому что $g^{-1}U$ — окрестность единицы). Покажем, что $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$ (этого достаточно, так как V^{-1} — окрестность единицы по непрерывности взятия обратного и $h \cdot V^{-1}$ — окрестность h). Пусть $v_1, v_2 \in V$ и $gv_1 = h \cdot v_2^{-1}$. Тогда $h = gv_1 \cdot v_2$, откуда $h \in g \cdot V \cdot V \subset U$ — противоречие. Это доказывает T_2.

Докажем T_3. В силу однородности достаточно показать, что для любой окрестности единицы U найдётся окрестность единицы V такая, что $\overline{V} \subset U$. Возьмём V, для которой $V \cdot V \subset U$. У каждой точки $g \notin U$ есть окрестность, которая не пересекается с V — это $g \cdot V^{-1}$. Действительно, если $v_1, v_2 \in V$ и $g \cdot v_1^{-1} = v_2$, то $g = v_2 \cdot v_1 \in V \cdot V \subset U$ — противоречие. Значит, $\overline{V} \subset U$.

Для доказательства $T_{3\frac{1}{2}}$ нужен следующий важный факт.

<u>Лемма</u> Пусть U_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — убывающая последовательность подмножеств топологической группы G такая, что
① $1 \in U_n$ $\forall n$; ② $U_n = U_n^{-1}$ $\forall n$; ③ $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$ $\forall n$.
Тогда на группе G существует такая полунорма*) $\|\cdot\|$ на G
$$\{x : \|x\| < \tfrac{1}{2^n}\} \subset U_n \subset \{x : \|x\| \leq \tfrac{1}{2^{n-1}}\}$$
для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство этой леммы довольно длинно (в духе леммы Урысона), и мы не будем его приводить. Оно сводится к построению монотонной системы множеств $U(\frac{m}{2^n})$ так, что $U(\frac{1}{2^n}) = U_n$, причём $U(\frac{m}{2^n}) \cdot U(\frac{1}{2^n}) \subset U(\frac{m+1}{2^n})$, и определению функции $f : G \to \mathbb{R}$: $f(x) = \inf\{\frac{m}{2^n} : x \in U(\frac{m}{2^n})\}$. При этом из $f(x) < r$ вытекает, что $x \in U(r)$. Затем остаётся положить $\|x\| = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|$.

*) Т.е. функция $\|\cdot\| : G \to \mathbb{R}$ такая, что
1) $\|1\| = 0$, 2) $\|x\| = \|x^{-1}\|$ $\forall x \in G$, 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in G$ (тогда $\|x\| \geq 0$ $\forall x$).

Нужно свойство 3 без док-ва
и замечание

Поскольку для каждой окрестности единицы U можно определить последовательность $U_0 = U, U_1, U_2, \ldots$, удовлетворяющую условиям леммы, найдётся полунорма $\|\cdot\|$ на G, которая принимает значение ≥ 1 на дополнении до U, причём условие
$\{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\} \subset U_n \subset \{x : \|x\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$ $\forall n$, как нетрудно видеть, влечёт за собой непрерывность этой полунормы. Теперь чтобы получить функцию из определения T_3-пространства достаточно положить $f = \min(\|\cdot\|, \mathbb{1})$ (где $\mathbb{1}$ — функция, тождественно равная 1).

3. Если топологическая группа удовлетворяет первой аксиоме счётности, то она метризуема.

Действительно: сказать, что G удовлетворяет первой аксиоме счётности — всё равно, что сказать, что у единицы в G есть счётная база окрестностей $\{U_0, U_1, \ldots\}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $U_0, U_1, U_2, \ldots$ удовлетворяет условиям леммы (иначе перейдём к меньшим окрестностям с нужными свойствами). Соответствующая полунорма, как легко видеть, непрерывна; более того, множества $V_n = \{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\}$, очевидно, тоже образуют базу окрестностей единицы. Эта полунорма на самом деле норма, т.е. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (потому что $\bigcap V_n = \{1\}$), и она порождает метрику $d : G \times G \to G$ по правилу $d(x, y) = \|x^{-1} y\|$. $\frac{1}{2^n}$-окрестности точки x относительно этой метрики — это в точности множества вида $x \cdot V_n$: $d(x, y) < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \|x^{-1} y\| < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow x^{-1} y \in V_n \Leftrightarrow y \in x V_n$. То, что эти множества образуют базу окрестностей точки x (это так, потому что это сдвиги на x элементов базы окрестностей единицы), как раз и означает, что d порождает топологию G.

Зам. В частности, стрелка Зоргенфрея (прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой образуют полуоткрытые интервалы $[a, b)$) не является топологической группой, какие групповые операции ни вводить на $\mathbb{R}$ (относительно обычного сложения она топологической группой не является уже потому, что операция взятия обратного не непрерывна): стрелка удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не метризуема (потому что она сепарабельна, но не имеет счётной базы — иначе её квадрат был бы нормален). Отметим, что стрелка Зоргенфрея — однородное пространство (сдвиги стрелки на любые числа являются гомеоморфизмами).

Не нужно

Кстати, хотя стрелка Зоргенфрея и не является топологической группой, она является паратопологической группой (непрерывно только умножение). Существует множество подобного сорта обобщений понятия топологической группы, когда требуется, например, лишь раздельная непрерывность умножения (и непрерывность взятия обратного), непрерывность умножения лишь по одному аргументу и т. п. Такие обобщения часто бывают полезны. Например, известна теорема Эллиса, которая гласит, что в любой полугруппе с компактной топологией, умножение в которой непрерывно по одному из аргументов, найдётся идемпотент, т.е. такой элемент e, что $e \cdot e = e$. Известно также, что любая компактная паратопологическая группа является топологической группой, т.е. непрерывность умножения при наличии компактности влечёт за собой непрерывность взятия обратного.

4. Всякая топологическая группа, порождённая (как группа) компактным подмножеством, обладает свойством Суслина — факт весьма удивительный, поскольку просто компактов без этого свойства существует очень много.

5. Всякий непрерывный гомоморфизм топологических групп, являющийся факторным отображением, открыт, т.е. переводит открытые множества в открытые.

Действительно, если $h: G \to H$ — непрерывной гомоморфизм и отображение h факторно, т.е. $U \subset H$ открыто $\Leftrightarrow h^{-1}(U)$ открыто, то для любого открытого в G множества V множество $h(V)$ открыто в H, поскольку $h^{-1}(h(V)) = V \cdot \ker h$, а произведение открытого множества V и любого другого множества $A \subset G$ открыто, потому что это объединение открытых множеств $V \cdot a$, $a \in A$.

Этот список можно продолжать очень долго.

Не нужно

Особое место в теории топологических групп занимают свободные топологические группы — они играют роль, подобную той, какую в теории абстрактных (не топологических) групп играют абстрактные свободные группы.

Для каждого тихоновского пространства X определена его <u>свободная топологическая группа</u> $F(X)$ — это топологическая группа со следующими свойствами:

1. X является подпространством $F(X)$ (причём X оказывается даже замкнутым в $F(X)$);
2. любое непрерывное отображение $X \to G$ в любую топологическую группу G продолжается до непрерывного гомоморфизма $F(X) \to G$.

Алгебраически $F(X)$ — свободная группа, порождённая множеством X. Условия ① и ② означают, что топология группы $F(X)$ индуцирует на X исходную топологию этого пространства, и это самая сильная из всех групповых топологий на $F(X)$, индуцирующих на X исходную топологию. Действительно, если $F'(X)$ — та же свободная группа с другой групповой топологией, индуцирующей на X его исходную топологию, то тождественное вложение $i: X \to F'(X)$ продолжается до изоморфизма $F(X) \to F'(X)$, который по условию ② должен быть непрерывным, а это как раз и означает, что топология $F(X)$ сильнее. Эта топология называется <u>свободной топологией</u>.

Из условия ② вытекает также, что всякая топологическая группа G, порождённая (алгебраически) своим подпространством X, является топологической фактор-группой (т. е. образом при факторном = открытом гомоморфизме) свободной топологической группы $F(X)$.

Существования свободной топологической группы $F(X)$ для любого тихоновского пространства X доказывается не очень сложно, примерно так же, как существование βX: сначала нужно взять множество $\mathcal{G}$ топологических групп такое, что любая топологическая группа мощности $\le \max(|X|, 2^{\aleph_0})$ топологически изоморфна*) одной из групп в $\mathcal{G}$ (просто все топологические группы мощности $\le \max(|X|, 2^{\aleph_0})$ взять нельзя — это не множество). Такое множество можно получить, например, взяв свободную группу $F(X)$ (без топологии), все фактор-группы этой группы (получится множество всех, с точностью до изоморфизма, групп мощности $\le \max(|X|, 2^{\aleph_0})$).

---

*) Топологический изоморфизм — это отображение, являющееся одновременно гомеоморфизмом и изоморфизмом.

Не нужно

а затем снабдив эти факторгруппы всеми возможными групповыми топологиями (каждая топология — множество подмножеств, поэтому в результате опять получится множество). Затем надо рассмотреть все возможные непрерывные отображения $f: X \to G$, где $G \in \mathcal{G}$. Получится некоторое множество отображений $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to G_\alpha\}$. После этого останется взять диагональ $\Delta f_\alpha : X \to \prod G_\alpha$, рассмотреть групповую оболочку $H = \langle \Delta f_\alpha(X) \rangle$ множества $\Delta f_\alpha(X)$ в $\prod G_\alpha$ и показать, что X гомеоморфно вложено в H (Это вытекает из того, что семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества — X тихоновское, поэтому непрерывные отображения $f: X \to \mathbb{R}$ разделяют точки и замкнутые множества, а $\mathbb{R}$ — топологическая группа мощности $\le \max(|X|, 2^{\aleph_0})$.) Группа H автоматически оказывается свободной группой, порождённой X, и это единственная группа со свойствами ① и ② (с точностью до топологического изоморфизма).

Топология группы $F(X)$ (так же как и топология βX) устроена очень сложно и редко обладает хорошими свойствами; в частности, для недискретного X $F(X)$ никогда не бывает метризуемой. Однако кое-что про неё сказать можно.

Будучи свободной группой над X, $F(X)$ есть множество несократимых слов, т.е. записей вида $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$; при этом предполагается, что зафиксирована гомеоморфная копия X^{-1} пространства X, $X^{-1} \cap X = \varnothing$, и x^{-1} — это элемент X^{-1}, соответствующий точке $x \in X$ при гомеоморфизме. Число n называется <u>длиной</u> слова $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$; слово нулевой длины — это пустое слово e, единица группы $F(X)$. В несократимом слове невозможны сокращения, т.е. нет пар стоящих рядом букв вида $x x^{-1}$ и $x^{-1} x$. Чтобы получить произведение двух слов $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ и $y_1^{\delta_1} \dots y_k^{\delta_k}$, нужно записать эти слова подряд как одно длинное слово $x_1^{\varepsilon_1} \dots x^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} \dots y_k^{\delta_k}$, а затем произвести все возможные сокращения, т.е. вычеркнуть все пары стоящих рядом букв вида $x x^{-1}$ и $x^{-1} x$ (если они возникнут). От порядка сокращений результат не зависит. В частности, результатом умножения слов $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ и $x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$ будет пустое слово (единица группы), поэтому элемент $x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$ — обратный к элементу $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ в группе $F(X)$.

Каждое отображение $f: X \to G$, где G — любая группа, естественным (и единственным) образом продолжается до гомоморфизма $\hat{f}: F(X) \to G$: $\hat{f}(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) = f(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot f(x_n)^{\varepsilon_n}$,

в группе G

Не нужно

и по определению свободной топологии если G — топологическая группа и отображение f непрерывно, то гомоморфизм $\hat{f}$ тоже непрерывен. Более того, если f факторно, то $\hat{f}$ оказывается факторным (а значит, и открытым), т.е. G оказывается топологической факторгруппой группы $F(X)$.

Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$F_n(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k} : k \le n,\ x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1, \text{ слово } x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k} \text{ несократимо}\};$$

это множество всех несократимых слов длины $\le n$. Тогда $F(X) = \bigcup_{n\ge 0} F_n(X)$, причём $F_k(X) \subset F_n(X)$ для $k \le n$. Заметим, что каждое $F_n(X)$ есть образ пространства $(X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^n$ при естественном непрерывном отображении умножения $j_n : (X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^n \to F_n(X)$, $j_n((x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n})) = x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ (здесь $x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ — произведение элементов $x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}$ в $F(X)$, т.е. несократимое слово, которое получается из $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ путём сокращений. Допуская некоторую вольность здесь мы считаем, что $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ и $x^0 = e$ $\forall x \in X$.) Таким образом, каждое подпространство $F_n(X)$ группы $F(X)$ есть непрерывный образ n-й степени суммы двух гомеоморфных копий X и одноточечного пространства $\{e\}$. Поэтому если, например, X сепарабельно или все конечные степени X линделёфовы, то тем же свойством обладает и $F(X) = \bigcup F_n(X)$.

Отображения умножения просто отождествляют наборы $(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_k^{\varepsilon_k})$ и $(y_1^{\delta_1}, \dots, y_n^{\delta_n})$, один из которых можно получить из другого удалением/вставкой пар вида $z^{\varepsilon}, z^{-\varepsilon}$ и элемента e, т.е. они производят некоторую естественную факторизацию. Естественно было бы ожидать, что эти отображения факторны, однако на самом деле факторными они бывают редко (даже для $X = \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — обычное пространство рациональных чисел, уже j_3 не факторно). Для компактов, конечно, все j_n факторны, потому что вообще все непрерывные отображения компактов факторны (а степени $(X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^n$, конечно, компактны).

Для компакта X группа $F(X)$ обладает и ещё одним редким для свободных топологических групп свойством — $F(X)$ является прямым пределом последовательности подпространств $(F_n(X))_{n\in\omega}$, т.е. $U \subset F(X)$ открыто тогда и только тогда, когда каждое пересечение $U \cap F_n(X)$ открыто в $F_n(X)$. Для некомпактных X это, как правило, не так.

Не нужно

Выше мы видели, что наличие непрерывных групповых операций на топологическом пространстве оказывает заметное влияние на топологические свойства этого пространства. Имеет место и обратная зависимость: зная топологические свойства топологической группы, мы можем кое-что сказать об алгебраической структуре этой группы. Так, например, все конечно порождённые подгруппы любой компактной топологической группы финитно аппроксимируемы (т.е. вкладываются в декартово произведение конечных групп в качестве подгруппы); с другой стороны, ни на какой (абстрактной) свободной или свободной абелевой группе не существует какой бы то ни было компактной групповой топологии.

Уже само существование недискретной групповой топологии накладывает некоторые ограничения на алгебраическую структуру группы. В 1941 г. А.А. Марков поставил вопрос о существовании недискретной групповой T_0-топологии на произвольной бесконечной группе, и в 1979 г. отрицательный ответ на этот вопрос независимо дали А.Ю. Ольшанский и С. Шелах, причём построенные ими примеры нетопологизируемых групп были принципиально разными.

Ольшанский построил (счётную) группу Бернсайда G (т.е. бесконечную конечно порождённую группу, в которой порядки всех элементов ограничены некоторым числом N) с дополнительным свойством: существует конечное множество $\{z_1, \dots, z_k\} \subset G\setminus\{1\}$ такое, что для всякого $\overset{\ne 1}{g} \in G$ существуют $n \le N$ и $l \le k$, для которых $g^n = z_l$. Таким образом, всякий отличный от единицы элемент группы G удовлетворяет одному из уравнений

$$x = z_1,\ x^2 = z_1, \dots, x^N = z_1,\ x = z_2,\ x^2 = z_2, \dots, x^N = z_2, \dots, x = z_k,\ x^2 = z_k, \dots, x^N = z_k,$$

т.е. $G\setminus\{1\}$ является объединением множеств решений этих уравнений. Осталось заметить, что в любой групповой T_0-топологии на G все одноточечные множества замкнуты (потому что $T_0 \Rightarrow T_1$ для групп) и все отображения $f_n\colon x \to x^n$ непрерывны (потому что умножение непрерывно), так что множество решений каждого из перечисленных уравнений замкнуто, поскольку оно может быть представлено в виде $f_i^{-1}(\{z_j\})$ для некоторых i и j. Таким образом, какова бы ни была групповая T_0-топология на G, $G\setminus\{1\}$ является объединением конечного числа замкнутых множеств, поэтому одноточечное множество $\{1\}$ открыто; следовательно (из однородности любой группы), открыты и все $\{g\}$ для $g \in G$, т.е. топология дискретна.

Не нужно

Шелах построил несчётную группу, решая проблему Куроша о существовании группы Йонсона; а именно, он построил группу G с тем свойством, что для любого несчётного множества $S \subset G$ имеем $S^{10000} = G$, и заметил, что эта группа нетопологизируема (Шелах построил свой пример в предположении справедливости континуум-гипотезы $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$; Г. Гессе сумел модифицировать группу G так, что континуум-гипотеза стала не нужна, хотя модифицированная группа осталась нетопологизируемой, но при этом было потеряно указаное выше замечательное свойство.) Группа Шелаха имела вид $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы G, причём $M_\alpha \subset M_\beta$ для $\alpha < \beta$ и для любых $\alpha<\omega_1$, $g \notin M_\alpha$ $g^{-1} M_\alpha g \cap M_\alpha = \{1\}$.

Рассмотрим любую групповую топологию на G. Предположим, что в этой топологии у единицы есть счётная окрестность U. Эта U содержится в M_α для некоторого $\alpha < \omega_1$. Заметим, что для любого $g \notin M_\alpha$ $g^{-1} U g$ — тоже окрестность единицы, поэтому и $g^{-1} U g \cap U$ — окрестность единицы; однако $g^{-1} U g \cap U \subset g^{-1} M_\alpha g \cap M_\alpha = \{1\}$; значит, топология дискретна.

Предположим теперь, что все окрестности единицы несчётны, возьмём любую окрестность единицы U и найдём окрестность единицы V такую, что $V^{10000} \subset U$ (это можно сделать в силу непрерывности умножения). Поскольку V несчётна, имеем $V^{10000} = U = G$, т.е. топология в этом случае антидискретна (и, конечно, не удовлетворяет аксиоме T_0).

Разумеется, можно рассматривать не только группы, но и полугруппы, кольца, поля и вообще любые алгебраические системы с непрерывными операциями (кстати, например, все счётные кольца (и все бесконечные поля) топологизируемы), равно как и, скажем, векторные пространства над разными полями (все бесконечные векторные пространства топологизируемы, зато в теории таких пространств возникает много специфических вопросов, например, о связи между топологией векторного пространства и индуцируемой ею топологией на базисе).

Не нужно

Топологические группы и другие тополого-алгебраические объекты естественно возникают в самых разных контекстах. Например, большой популярностью пользуются группы Ли — это топологические группы, являющиеся одновременно топологическими многообразиями, т.е. локально гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ для некоторого n. Можно доказать, что на любой такой группе можно ввести структуру гладкого многообразия так, что групповые операции окажутся не просто непрерывными, но и гладкими. Известна замечательно простая характеризация групп Ли: группы Ли — это в точности локально компактные группы без малых подгрупп (это означает, что у единицы есть окрестность, не содержащая нетривиальных подгрупп). Группы Ли представляют собой естественное полезное обобщение топологических групп симметрий; полезно бывает также рассматривать и общие непрерывные (т.е. топологические) группы преобразований топологических пространств.

Нельзя не упомянуть и многочисленные функциональные пространства $C(X)$, т.е. пространства непрерывных функций на топологическом пространстве X, которые бывает полезно снабжать разными топологиями: топологией поточечной сходимости (которая индуцируется из тихоновского произведения $\mathbb{R}^X$), компактно-открытой топологией (т.е. топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах X), а если X — компакт, то и топологией равномерной сходимости; эта топология порождается sup-нормой ($\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$), которая оказывается полной; $C(X)$ с sup-нормой (т.е. равномерной топологией) для компактов X — основной пример банаховых пространств.

На произвольных (не обязательно функциональных) векторных пространствах L тоже рассматривают разные топологии, в частности, слабую топологию (это топология поточечной сходимости в пространстве L, где каждое $x \in L$ интерпретируется как линейный функционал на L^*); на L^* двойственным образом возникает слабая* топология (топология поточечной сходимости), а также сильная топология (топология сходимости на ограниченных множествах).

Наконец, упомянем теорему Дугунджи, которая, наряду с теоремой Борсука–Дугунджи (её обобщением на класс топологических пространств, содержащий все метризуемые пространства) играет исключительно важную роль в функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений (в доказательстве существования и единственности решений): Пусть X — метризуемое пространство, $A \subset X$ замкнуто, L — локально выпуклое пространство (т.е. топологическое векторное пространство, в нуле которого есть база окрестностей из выпуклых множеств) и $f: A \to L$ — непрерывное отображение. Тогда существует непрерывное продолжение $\hat{f}: X \to L$ отображения f, причем $\hat{f}(X) \subset \operatorname{conv}(A)$. Более того, отображение продолжения $\varphi: C(A) \to C(X)$, $\varphi(f) = \hat{f}$, линейно.