Нужно определение гомотопии

Гомотопии и гомотопические группы

Определения

Пусть X и Y — топологические пространства. Отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ называются <u>гомотопными</u>, если существует такое непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$ $\forall x \in X$. Иными словами, отображения f_0 и f_1 можно связать семейством непрерывных отображений $f_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящих от t. Это семейство отображений называют <u>гомотопией</u>, связывающей f_0 и f_1. Тот факт, что отображение f_0 и f_1 гомотопны, записывается как $f_0 \simeq f_1$.

Легко проверить, что гомотопность — отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений $X \to Y$.

Топологические пространства X и Y <u>гомотопически эквивалентны</u>, если существуют такие непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям id_Y и id_X. Тот факт, что X и Y гомотопически эквивалентны, записывается $X \sim Y$.

Топологическое пространство <u>стягиваемо</u>, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Топологическое пространство <u>линейно связно</u>, если любые две точки в нём можно соединить (непрерывным) путём.

Отображение, гомотопное постоянному отображению, называют <u>гомотопным нулю</u>.

Примеры

1. Легко видеть, что $\mathbb{R}^n$ и D^n гомотопически эквивалентно точке.
2. Любой связный одномерный комплекс гомотопически эквивалентен букету окружностей (т.е. объединению попарно непересекающихся окружностей, в каждой из которых выбрано по точке и все выбранные точки стянуты в одну).

NB Очевидно, любые гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны.

---

*) Т.е. набор точек $A_1, A_2, \ldots$ в $\mathbb{R}^3$, некоторые из которых соединены попарно непересекающимися кривыми (иными словами, граф).

Нужно понимать, как устроена фундаментальная группа (умножение, обратный элемент)
Строго доказывать корректность определений не нужно

Гомотопические группы

Важной топологической характеристикой топологического пространства X, в котором выбрана произвольная точка x_0 (отмеченная точка), является его фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$. Её элементами служат классы гомотопных петель в X с началом x_0, т.е. непрерывных отображений $f: [0,1] \to X$, для которых $f(0) = f(1) = x_0$ (т.е. путей с началом и концом x_0). Мы будем отождествлять такие отображения с непрерывными отображениями $S^1 \to X$, которые переводят некоторую (отмеченную) точку окружности S^1 в x_0.

Произведение двух петель f_1 и f_2 определяется так:
$$f_1 \cdot f_2(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{при } 0 \le t \le 1/2, \\ f_2(2t-1) & \text{при } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$
Иными словами, за первую половину пути мы с удвоенной скоростью проходим петлю f_1, а за вторую — петлю f_2. Произведение гомотопических классов петель — это гомотопический класс произведения этих петель.

Единичным элементом фундаментальной группы служит класс, содержащий постоянное отображение $[0,1] \to \{x_0\}$. Класс, обратный классу петли $f(t)$, — это класс петли $g(t) = f(1-t)$.

Несложно проверить, что так определённое умножение ассоциативно, однако коммутативно оно далеко не всегда.

Пусть α — путь в X с началом x_1 и концом x_2, и пусть f — петля с началом и концом x_2. Легко проверить, что отображение $f \mapsto \alpha^{-1} f \alpha$ индуцирует изоморфизм группы $\pi_1(X, x_1)$ на группу $\pi_1(X, x_2)$; при этом изоморфизме гомотопическому классу любой петли f с началом x_1 соответствует гомотопический класс петли $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$, начало которой есть x_2. Говорят, что этот изоморфизм индуцирован путём α. Отсюда вытекает, в частности, что фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ линейно связного пространства не зависит от отмеченной точки: все группы $\pi_1(X, x)$, $x \in X$, изоморфны (хотя изоморфизмы между ними зависят от путей, связывающих соответствующие отмеченные точки). В этом случае часто пишем $\pi_1(X)$ вместо $\pi_1(X, x)$.

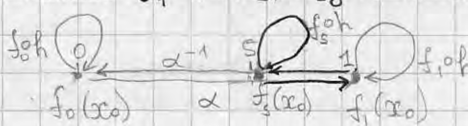
Линейно связное*) пространство X называют односвязным, если $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ для некоторой точки x_0; в этом случае $\pi_1(X, x) = \{0\}$ для любой точки $x \in X$.

*) Иногда линейная связность не требуется.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ естественным образом индуцирует гомоморфизм $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$. При этом гомоморфизме класс петли $\omega(t)$ переходит в класс петли $f(\omega(t))$. Ясно, что $(fg)_* = f_* g_*$.

Т.1 Пусть непрерывные отображения $f_0, f_1: X \to Y$ пространств связаны гомотопией $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$. Тогда гомоморфизм $(f_1)_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f_1(x_0))$ совпадает с композицией гомоморфизма $(f_0)_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f_0(x_0))$ и изоморфизма $\pi_1(Y, f_0(x_0)) \to \pi_1(Y, f_1(x_0))$, индуцированного путём $\alpha(t) = f_t(x_0)$, соединяющим точки $f_0(x_0)$ и $f_1(x_0)$.

□ Пусть h — некоторая петля в X с началом (и концом) в x_0. Достаточно доказать, что петли $f_1 \circ h$ и $\alpha^{-1} \circ f_0 \circ h \circ \alpha$ в Y гомотопны. Гомотопия $\{\varphi_s\}$ выглядит так:



▨ (на рисунке выделена петля φ_s)

Т.2 Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных топологических пространств изоморфны.

□ Пусть X и Y — линейно связные пространства и $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ — отображения такие, что $f \circ g \sim id_Y$ и $g \circ f \sim id_X$. По теореме 1 гомоморфизмы $g_* \circ f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$ и $f_* \circ g_*: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, f(g(y_0)))$ являются композициями тождественного отображения и изоморфизма, т.е. изоморфизмами. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*^{(1)}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*^{(2)}} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))).$$

(Здесь $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$ — гомоморфизмы фундаментальных групп с разными отмеченными точками, индуцированные одним и тем же отображением f.) Гомоморфизм $g_* \circ f_*^{(1)}$ — изоморфизм, поэтому g_* — эпиморфизм. Гомоморфизм $f_*^{(2)} \circ g_*$ — тоже изоморфизм, поэтому g_* — мономорфизм.

□ Значит, g_* — изоморфизм.

След. Фундаментальная группа связного 1-мерного комплекса изоморфна фундаментальной группе некоторого букета окружностей.

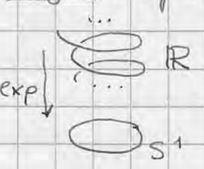
NB Фундаментальные группы гомеоморфных линейно связных пространств изоморфны.

Не нужно

Накрытия

Пусть $\tilde X$ и X — линейно связные пространства. Отображение $p\colon \tilde X \to X$ называется *накрытием*, если $p(\tilde X)=X$ и существует такое дискретное пространство D, что у каждой точки $x\in X$ есть окрестность U, прообраз $p^{-1}(U)$ которой гомеоморфен $U\times D$, причем ограничение p на $p^{-1}(U)$ устроено как естественная проекция $U\times D\to U$. При этом $\tilde X$ называют *накрывающим пространством*, а X — *базой* накрытия.

Пример: отображение $\exp\colon \mathbb{R}\to S^1$, переводящее точку $t\in\mathbb{R}$ в $e^{2\pi i t}\in S^1$, — накрытие. В качестве D можно взять множество $\mathbb{Z}$ целых чисел.



Поднятием пути $\gamma(t)\subset X$ *) относительно накрытия p называется такой путь $\tilde\gamma(t)\subset\tilde X$, что $p(\tilde\gamma(t))=\gamma(t)$ при всех t. Если x_0 — начало пути γ, а $\tilde x_1\in p^{-1}(x_0)$, то существует единственное поднятие пути γ с началом в точке $\tilde x_1$ (в силу дискретности D). Пример накрытия exp показывает, что поднятие замкнутого пути (петли) не обязательно является петлей. Накрытие $p:\tilde X\to X$ индуцирует гомоморфизм $p_*:\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\to\pi_1(X,x_0)$, где $x_0=p(\tilde x_0)$. Гомотопический класс петли $\gamma(t)\subset X$ с началом в x_0 принадлежит подгруппе $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))\subset\pi_1(X,x_0)$ тогда и только тогда, когда поднятие этой петли с началом в $\tilde x_0$ замкнуто (т.е. является петлей). Для другой точки $\tilde x_1\in p^{-1}(x_0)$ группы $G_0=p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$ и $G_1=p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_1))$ не обязательно совпадают: $G_1=\alpha^{-1}G_0\alpha$, где α — проекция пути в $\tilde X$, соединяющего точки $\tilde x_0$ и $\tilde x_1$. Совпадение групп G_0 и G_1 равносильно тому, что поднятие петли с началом в $\tilde x_0$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто поднятие этой петли с началом в $\tilde x_1$. Ясно также, что любое поднятие петли с началом в x_0 соединяет некоторые точки $p^{-1}(x_0)$. Поэтому поднятия петли с началом x_0, начинающиеся в разных точках из $p^{-1}(x_0)$, одновременно замкнуты или одновременно незамкнуты $\Leftrightarrow$ $\alpha^{-1}G_0\alpha=G_0$ $\forall\alpha\in\pi_1(X,x_0)$, т.е. $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X,x_0)$. Накрытия p с этим свойством называются *регулярными*.

*) Напомним, что под путём мы подразумеваем как отображение $[0,1]\to X$, так и его образ.

Не нужно

Рассмотрим гомоморфизм $p_*: \pi_1(\tilde X, \tilde x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Прежде всего покажем, что это мономорфизм. Надо проверить, что если петли $\tilde\gamma_0$ и $\tilde\gamma_1$ с началом в $\tilde x_0$ проецируются в гомотопные петли γ_0 и γ_1, то они и сами гомотопны. Это так: пусть $\{\gamma_s(t)\}$ — гомотопия, соединяющая γ_0 и γ_1. При фиксированном $t=t_0$ получаем путь $\omega_{t_0}(s) = \gamma_s(t_0)$, соединяющий точки $\gamma_0(t_0)$ и $\gamma_1(t_0)$. Пусть $\tilde\omega_{t_0}(s)$ — его поднятие с началом в $\tilde\gamma_0(t_0)$. Концы путей $\tilde\omega_t(s)$, $t\in[0,1]$, образуют путь $\tilde\gamma$, проецирующийся в γ_1, причём его начало (и конец) — точка $\tilde x_0$. Поэтому $\tilde\gamma$ совпадает с $\tilde\gamma_1$, а значит, $\{\tilde\gamma_s(t) = \tilde\omega_t(s)\}_{s\in[0,1]}$ — гомотопия, соединяющая $\tilde\gamma_0$ и $\tilde\gamma_1$.

Для подгруппы $H = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) \subset \pi_1(X, x_0) = G$ можно рассмотреть правые смежные классы Hg_i, $g_i \in G$. Между ними и точками прообраза $p^{-1}(x_0)$ существует естественное взаимно однозначное соответствие. Для его построения мы воспользуемся тем, что среди точек в $p^{-1}(x_0)$ есть выделенная точка $\tilde x_0$. Сопоставим петле γ с началом x_0 в X конец поднятия этой петли с началом в $\tilde x_0$. Получим отображение $G \to p^{-1}(x_0)$. Покажем, что оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами и точками множества $p^{-1}(x_0)$. Пусть $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ — поднятия с началом $\tilde x_0$ петель γ_1 и γ_2. Концы $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2^{-1}$ — замкнутый путь с началом $\tilde x_0$, т.е. $\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2^{-1} \in H$. Остаётся заметить, что рассматриваемое отображение $G \to p^{-1}(x_0)$ сюръективно: в точку $\tilde x_1 \in p^{-1}(x_0)$ отображается элемент $\pi_1(X, x_0)$ (гомотопический класс), содержащий проекцию пути в $\tilde X$ с началом в $\tilde x_0$ и концом в $\tilde x_1$ (*); эта проекция — петля в X с началом x_0. Итак, мы доказали следующую теорему.

$\boxed{\text{Т.3}}$ Если $p: \tilde X \to X$ — накрытие и $p(\tilde x_0) = x_0$, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством смежных классов $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ и множеством $p^{-1}(x_0)$.

Если накрытие p регулярное, то $G/H = \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ — группа (потому что H тогда нормальна в G). Более того, фиксировав точку $\tilde x_0 \in p^{-1}(x_0)$, множество $p^{-1}(x_0)$ тоже можно снабдить структурой группы, причём в соответствие $G/H \leftrightarrow p^{-1}(x_0)$ можно вставить промежуточную

---

*) Напомним, что $\tilde X$ предполагается линейно связным.

группу $\mathrm{Aut}(p)$: $G/H \leftrightarrow \mathrm{Aut}(p) \leftrightarrow p^{-1}(x_0)$. Это <u>группа автоморфизмов</u> накрытия p; при этом гомеоморфизм $f: \tilde{X} \to \tilde{X}$ называется <u>автоморфизмом накрытия</u> $p: \tilde{X} \to X$, если $p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Если $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, то $p(\tilde{y}) = p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$, так что автоморфизм просто переставляет точки в прообразах точек из X при p.

Т.4 | Любой автоморфизм накрытия полностью определяется образом одной точки (при этом автоморфизме).

□ Надо показать, что для накрытия $p: \tilde{X} \to X$ существует не более одного автоморфизма $f: \tilde{X} \to \tilde{X}$, переводящего точку $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ в $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$. Пусть $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ — любая точка. Рассмотрим путь $\tilde{\gamma}_0$ в $\tilde{X}$, соединяющий $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$. Пусть $\gamma = p\tilde{\gamma}_0$ — его проекция, а пусть $\tilde{\gamma}_1$ — поднятие γ с началом в $\tilde{x}_1$. Тогда f переводит $\tilde{\gamma}_0$ в $\tilde{\gamma}_1$, а значит, $f(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_1$ — конец пути $\tilde{\gamma}_1$, который определён однозначно.
Ясно также, что автоморфизм f, переводящий $\tilde{x}_0$ в $\tilde{x}_1$, существует тогда и только тогда, когда точка $\tilde{y}_1$ однозначно определяется точкой $\tilde{y}_0$, т.е. поднятие с началом в $\tilde{x}_1$ проекции любого замкнутого пути с началом в $\tilde{x}_0$ тоже замкнуто. ■

Т.5 | Для регулярного накрытия $p: \tilde{X} \to X$ группа $\mathrm{Aut}(p)$ изоморфна $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

□ Пусть α — петля в X с началом x_0. Классу $[\alpha]$ (класс гомотопных петель, элемент $\pi_1(X, \tilde{x}_0)$) поставим в соответствие автоморфизм накрытия g_α, определённый так: пусть $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ — фиксированная точка в $p^{-1}(x_0)$ и $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ — любая точка. Соединим $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$ путём $\tilde{\gamma}$ и рассмотрим путь $\gamma = p\tilde{\gamma}$. Положим $g_\alpha(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_1$, где $\tilde{y}_1$ — конец поднятия пути $\gamma\alpha$ с началом $\tilde{x}_0$.

Ядро гомоморфизма $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(p)$ — подгруппа $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Этот гомоморфизм эпиморфен: для любого $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ можно рассмотреть петлю α, являющуюся проекцией пути из $\tilde{x}_0$ в $\tilde{x}$. Петле α соответствует автоморфизм, переводящий $\tilde{x}_0$ в $\tilde{x}$, и этот автоморфизм единствен. ■

<u>След. 1</u> | Если $p: \tilde{X} \to X$ — накрытие и $\pi_1(\tilde{X}) = \{0\}$, то $\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(X)$.

<u>След. 2</u> | $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

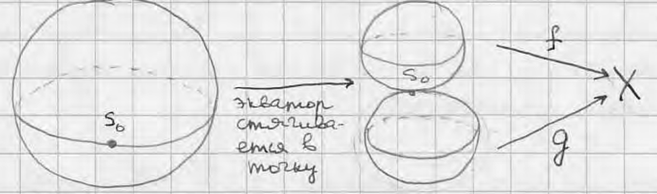
□ Рассмотрим накрытие $p = \exp: \mathbb{R} \to S^1$. Поскольку $\mathbb{R}$ стягиваемо, имеем $\pi_1(\mathbb{R}) = \{0\}$ и $\pi_1(S^1) \cong \mathrm{Aut}(p)$. Любой автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(p)$ однозначно задаётся точкой $g(0) = 2\pi n_g$, где $n_g \in \mathbb{Z}$. Для $t \in \mathbb{R}$ имеем $g(t) = t + 2\pi n_g$, значит, для $h \in \mathrm{Aut}(p)$ $h \circ g(t) = t + 2\pi(n_h + n_g)$, откуда $\mathrm{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$. Целому числу n соответствует автоморфизм $t \mapsto t + 2\pi n$, а ему, в свою очередь, — петля, обходящая S^1 n раз. ■

Нужно понимать, как устроены группы π_n
(без строгих доказательств корректности)

Гомотопические группы

Гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ — это обобщение фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$, которое получается, если заменить петли (т.е. отображения из окружности S^1 с отмеченной точкой s_0 в X, переводящие s_0 в x_0) на сфероиды (т.е. отображения из сферы S^n с отмеченной точкой s_0 в X, переводящие s_0 в x_0). При этом два сфероида $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$ считаются эквивалентными, если они связаны гомотопией $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ такой, что $h_t(s_0) = x_0 \ \forall t \in [0,1]$. Как и в одномерном случае, мы отождествляем отображения $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$, переводящие s_0 в x_0, с отображениями $[0,1]^n \to (X, x_0)$, переводящими границу куба $[0,1]^n$ (её по традиции обозначают $\partial[0,1]^n$) в $\{x_0\}$, а также с отображениями $D^n \to (X, x_0)$, переводящими ∂D^n в $\{x_0\}$.

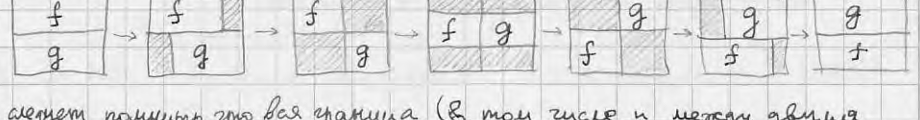
Операция умножения классов двух сфероидов $f, g : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ определяется так:



или так (если сфероиды рассматривают как отображения $[0,1]^n \to X$):

(мы опускаем технические детали, подобные удвоению скорости обхода окружности в одномерном случае).

При $n \geq 2$ порядок, в котором берётся произведение отображений f и g, несущественен, поскольку отображения fg и gf гомотопны (заштрихованные области отображаются в x_0):



Здесь следует помнить, что вся граница (в том числе и между двумя половинами куба, на одной из которых действует f, а на другой — g) переходит в x_0.

Не нужно

Таким образом, для $n \geq 2$ группы $\pi_n(X, x_0)$ абелевы. В одномерном случае это не так: например, фундаментальная группа букета окружностей изоморфна свободной группе ранга, равного числу окружностей.

Осталось определить обратный элемент для класса отображения $f\colon [0,1]^n \to (X, x_0)$, для чего достаточно найти отображение $\hat f\colon [0,1]^n \to (X, x_0)$, для которого произведение $f\hat f$ гомотопно постоянному. В качестве $\hat f$ можно взять, например, такое отображение: представим куб $[0,1]^n$ в виде $[0,1]^{n-1}\times[-1,1]$ и положим $\hat f(x,s) = f(x,-s)$ для $x\in[0,1]^{n-1}$, $s\in[-1,1]$. Тогда $f\hat f(x,s) = f\hat f(x,-s)$, и семейство отображений

$$g_t(x,s) = \begin{cases} f\hat f(x,s) & \text{при } |s|\geq t,\\ f\hat f(x,t) & \text{при } |s|\leq t \end{cases}$$

Ясно, что $g_0 = f\hat f$ и g_1 переводит $[0,1]^{n-1}\times[-1,1]$ в x_0 (потому что все точки вида $(x,1)$ граничные и потому переходят в x_0 при f, $\hat f$ и $f\hat f$).

Вычисление гомотопических групп — сложная задача. Даже для двумерной сферы S^n посчитаны не все $\pi_n(S^2)$. В случае фундаментальных групп задача существенно упрощается при наличии (нетривиальных) накрытий (а при доказанном отсутствии таковых становится тривиальной). В случае высших гомотопических групп роль накрытий играют локально тривиальные расслоения. Если для накрытия прообразы точек дискретны, то для расслоений они могут быть гомеоморфны любому топологическому пространству (хотя локально отображение по-прежнему устроено как обычное проектирование). Разумеется, имеются и многочисленные теоремы, облегчающие подсчёт гомотопических групп. Одна из них — теорема Фрейденталя.

Пусть X — топологическое пространство. *Цилиндр* над X — это топологическое пространство $X\times[0,1]$. *Конус* над X (обозначается CX) — это факторпространство $X\times[0,1]/(X\times\{1\})$ (одно из оснований цилиндра стянуто в точку), а *надстройка* ΣX — это факторпространство

$$\Sigma X = CX/(X\times\{0\}) = X\times[0,1]/\sim,$$

где $(x,t)\sim(y,s)$, если $t=s$ и либо $x=y$, либо $t=s=0$ (а x и y любые), либо $t=s=1$ (а x и y любые). Иными словами, каждое основание цилиндра стягивается в точку.

Нужно знать следствие (без док-ва) и замечание

Очевидно, конус CS^n гомеоморфен D^{n+1}, а надстройка ΣS^n гомеоморфна S^{n+1}.

При наличии отмеченной точки $x_0 \in X$ часто удобнее иметь дело с приведённой надстройкой — это фактор-пространство $X\times[0,1]/(X\times\{1\}\cup X\cup\{0\}\cup\{x_0\}\times[0,1])$, т.е. обычная надстройка, в которой весь отрезок $\{x_0\}\times[0,1]$ дополнительно стянут в точку.

Рассмотрим сфероид $f: S^n \to X$. Отображение $\Sigma f: \Sigma S^n = S^{n+1} \to \Sigma X$, определённое правилом

$$\Sigma f([(y,t)]_\sim) = [(f(y),t)]_\sim \text{ для } y\in S^n \text{ и } t\in[0,1],$$

класс эквивалентности $\sim$, определённой выше

является сфероидом пространства ΣX. Нетрудно видеть, что если сфероиды $f, g: S^n\to X$ гомотопны, то гомотопны и Σf, Σg. Кроме того, сфероид $\Sigma(f\cdot g)$ (в $\pi_n(X)$) гомотопен сфероиду $\Sigma f\cdot\Sigma g$. Таким образом, сопоставление $f\mapsto \Sigma f$ порождает гомоморфизм $\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(\Sigma X)$; он называется <u>гомоморфизмом надстройки</u> и обозначается Σ. В частности, для любых n и k возникает отображение $\Sigma:\pi_n(S^k)\to\pi_{n+1}(S^{k+1})$.

Т. <u>Теорема Фрейденталя</u> (лёгкая часть)
Гомоморфизм $\Sigma: \pi_n(S^k)\to\pi_{n+1}(S^{k+1})$ является изоморфизмом при $n\le 2k-2$ и эпиморфизмом при $n=2k-1$.

<u>След.</u> $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ для всех $n\ge 1$.

<u>Зам.</u> Отметим также, что $\pi_n(S^k)=\{0\}$ для $n<k$ (это более или менее очевидно) и $\pi_n(S^1)=\{0\}$ для $n>1$ (это не так очевидно, но тоже верно).

Кроме того, ясно, что $\pi_n(\mathbb{R}^k)=\pi_n(D^k)=\{0\}$ для всех n и k. Напомним, что отсюда (и из нетривиальности групп $\pi_n(S^n)$) легко следует теорема о неретрагируемости шара, а с ней — и теорема Брауэра о неподвижной точке.

Гомотопические группы — один из фундаментальных объектов алгебраической топологии. Их важность заключается в том, что они являются топологическими (а даже гомотопическими) инвариантами топологических пространств и потому позволяют доказывать негомеоморфность пространств в сложных ситуациях.

Не нужно

Другой важный инструмент алгебраической топологии — разнообразные группы гомологий; вычисляются они значительно проще, чем гомотопические группы, но зато гораздо сложнее определяются.

Вообще, алгебраическая топология изучает топологические пространства путём сопоставления им алгебраических объектов (групп, колец и пр.), а также поведение этих объектов под действием топологических операций. При этом сами эти объекты не снабжены никакой топологией — они чисто алгебраические. Изучением алгебраических объектов с топологией, согласованной с алгебраической структурой, и влияния алгебраической и топологической структур друг на друга занимается другой раздел топологии — топологическая алгебра.