Нужны формулировки теорем и вывод их друг из друга

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы будем пользоваться обозначениями

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ — единичный диск (шар)

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \subset D^n$ — единичная сфера.

Сразу отметим, что диск D^n гомеоморфен n-мерному симплексу Δ^n, т.е. выпуклой оболочке $n+1$ аффинно независимой*) точки аффинного пространства $\mathbb{R}^k$, $k \ge n$.

Т. Теорема Брауэра о неподвижной точке

Любое непрерывное отображение $f: D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.**)

Брауэр доказал эту теорему в 1912 г., хотя до него утверждения, эквивалентные этой теореме, доказали Пуанкаре (1886 г.) и Боль (1904 г.) Следующая теорема тоже ей эквивалентна.

Т. Теорема о неретрагируемости шара на сферу

Не существует ретракции $r: D^n \to S^{n-1}$.

Эти две теоремы эквивалентны в том смысле, что первая легко выводится из второй и наоборот. Действительно, предположим, что $f: D^n \to D^n$ — непрерывное отображение без неподвижных точек. Для каждой точки $x \in D^n$ рассмотрим луч с началом $f(x)$, проходящий через точку x. Пусть $r(x)$ — точка, в которой этот луч пересекает сферу S^{n-1}. Легко проверить, что отображение r — ретракция D^n на S^{n-1} (т.е. r непрерывно и $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$).

Предположим теперь, что $r: D^n \to S^{n-1}$ — ретракция. Пусть $i: S^{n-1} \to S^{n-1}$ — какое-нибудь непрерывное отображение без неподвижных точек, например, $i: x \mapsto -x$ (все координаты точки $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ умножаются на -1). Тогда отображение $ir: D^n \to S^{n-1} \subset D^n$ непрерывно и не имеет неподвижных точек.

След. 1 Пусть $F \subset D^n$ — непустое замкнутое подмножество. Тогда существует непрерывное отображение $f: D^n \to D^n$, для которого $\mathrm{Fix}\, f \,(= \{x \in D^n : f(x) = x\}) = F$.

расстояние от x до F

□ Для $x \in D^n$ положим $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ и $f(x) = \begin{cases} x - d(x,F)\dfrac{x - x_0}{d(x, x_0)}, & x \ne x_0 \\ x_0, & x = x_0 \end{cases}$

расстояние между точками в $\mathbb{R}^n$

---

*) Это означает, что точки не лежат в подпространстве размерности $n-1$.

**) Напомним, что $x \in X$ — <u>неподвижная точка</u> отображения $f: X \to X$, если $f(x) = x$.

Не нужно

Опр. <u>Непрерывный путь</u> в топологическом пространстве X, соединяющий точки $x, y \in X$, — это любое непрерывное отображение $f: [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (возможно, $x = y$). Пути часто отождествляются с их образами.

След. 2 Пусть непрерывный путь α соединяет точки одной пары противоположных сторон прямоугольника, а путь β соединяет точки другой пары противоположных сторон. Если оба пути α и β лежат внутри прямоугольника, то они пересекаются в некоторой точке.

□ Пусть $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \in \mathbb{R}^2$ и $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ для $s, t \in [0,1]$. Достаточно доказать нужное утверждение для квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$ с координатами x_1 и x_2; можно также считать, что α и β определены на отрезке $[-1,1]$, а не на $[0,1]$, так что $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$ и $\beta(\varepsilon) = \varepsilon$ для $\varepsilon = \pm 1$.

Предположим, что $\alpha(s) \neq \beta(t)$ для всех $s, t \in [-1,1]$. Пусть $N(s,t) = \max\limits_{i=1,2} \{|\alpha_i(s) - \beta_i(t)|\}$. Рассмотрим отображение $F: [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$, заданное формулой

$$F(s,t) = \frac{1}{N(s,t)} (\beta_1(t) - \alpha_1(s), \alpha_2(s) - \beta_2(t)).$$

Квадрат $[-1,1]^2$ гомеоморфен диску D^2, поэтому по теореме Брауэра отображение F имеет неподвижную точку (s_0, t_0).

Образ отображения F состоит из точек вида $(\pm 1, t)$ и $(s, \pm 1)$, поэтому $s_0 = \pm 1$ и $t_0 = \pm 1$. Ясно, что

$$N(s,t) F(\pm 1, t) = (\beta_1(t) \mp 1, \alpha_2(\pm 1) - \beta_2(t)),$$
$$N(s,t) F(s, \pm 1) = (\beta_1(\pm 1) - \alpha_1(s), \alpha_2(s) \mp 1).$$

По условию пути α и β лежат внутри квадрата $[-1,1]^2$, поэтому $|\beta_1(t)| \leq 1$ и $|\alpha_2(s)| \leq 1$. Следовательно число ± 1 не может иметь то же знак, что и число $\beta_1(t) \mp 1$ или число $\alpha_2(s) \mp 1$. Приходим к противоречию с $N(s,t) > 0$. ■

Ещё одно следствие теоремы Брауэра мы уже знаем — это то, что $\dim [0,1]^n \geq n$ (откуда $\dim [0,1]^n = n$).

Наконец, из теоремы Брауэра можно вывести теорему Жордана, которая гласит, что если C — жорданова кривая, т.е. образ окружности S^1 при непрерывном инъективном отображении $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus C$ несвязно и состоит из двух компонент, каждая из которых ещё и линейно связна (X <u>линейно связно</u>, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить непрерывным путём).

Не нужно

Доказательства теоремы Брауэра

Существует много способов доказательства теоремы Брауэра. Мы обсудим два из них — элементарное (комбинаторное), которое основано на лемме Шпернера — комбинаторном аналоге теоремы Брауэра, и метод, основанный на применении гомотопических групп.

Комбинаторное доказательство использует три леммы, в одной из которых речь идёт о барицентрическом подразделении симплекса — это разложение n-мерного симплекса Δ^n с вершинами $a_0,\dots,a_n$ в объединение $(n+1)!$ n-мерных симплексов такое, что вершины $b_0,\dots,b_n$ каждого из составляющих объединение симплексов Δ' являются центрами масс некоторых множеств вершин Δ^n, а именно, b_i — это центр масс системы вершин $a_{\pi(0)},\dots,a_{\pi(i)}$, где π — некоторая зависящая от Δ' перестановка множества $\{0,\dots,n\}$. (Напомним, что центр масс, или барицентр, системы точек $x_0,\dots,x_k\in\mathbb{R}^n$, где $k\le n$, — это $\frac{x_0+\dots+x_k}{k}$ (у каждой точки n координат, и сложение покоординатное).) Иными словами, берётся середина каждого ребра Δ^n, барицентр каждой 2-мерной грани Δ^n, ..., барицентр каждой $(n-1)$-мерной грани Δ^n и барицентр самого симплекса Δ^n, а затем берутся самые "мелкие" n-мерные симплексы, вершинами которых служат полученные точки и вершины самого симплекса Δ^n.

Напомним также, что представление n-мерного симплекса Δ^n в виде объединения n-мерных симплексов называется *триангуляцией*, если любые две k-мерные грани этих симплексов, имеющие общую точку, являющуюся внутренней хотя бы для одной из граней, совпадают (для всех $k\le n$).

Пусть вершины k-мерного симплекса покрашены в цвета $0,\dots,n$ $(n\ge k)$. Будем говорить, что раскраска (набор цветов) *полная*, если все цвета $0,1,\dots,k$ встречаются среди цветов вершин симплекса (в таком случае они встречаются ровно по одному разу).

Лемма 1 Пусть все вершины триангуляции симплекса Δ^n раскрашены в цвета $0,\dots,n$. Тогда число симплексов триангуляции, раскраска вершин которых полна, сравнимо mod 2 *) с числом $(n-1)$-мерных граней симплексов триангуляции, содержащихся в границе симплекса Δ^n, вершины которых раскрашены в полный набор цветов $(0,1,\dots,n-1)$.

*) Т.е. имеет ту же чётность

Не нужно

□ Рассмотрим n-мерный симплекс, одна из граней которого является $(n-1)$-мерным симплексом с полной раскраской. Если противоположная вершина раскрашена в цвет n, то у этого симплекса ровно одна $(n-1)$-мерная грань с полной раскраской, а если в один из цветов $0, \dots, n-1$ — две. Поэтому число n-мерных симплексов с полной раскраской сравнимо по модулю 2 с числом пар, состоящих из n-мерного симплекса и его $(n-1)$-мерной грани с полной раскраской. Кроме того, каждый $(n-1)$-мерный симплекс с полной раскраской, лежащий на границе Δ^n, содержится в ровно одном n-мерном симплексе, а все другие $(n-1)$-мерные симплексы содержатся в ровно двух n-мерных симплексах. Поэтому указанное количество пар сравнимо по модулю 2 с количеством $(n-1)$-мерных граней с полной раскраской, содержащихся в симплексах триангуляции и составляющих границу Δ^n. ■

Лемма 2 | **Лемма Шпернера**

Предположим, что вершины триангуляции n-мерного симплекса Δ^n раскрашены так, что раскраска самого симплекса Δ^n полна и если вершина триангуляции принадлежит некоторой грани Δ^n, то цвет этой вершины совпадает с цветом одной из вершин этой грани. Тогда среди n-мерных симплексов триангуляции есть симплекс с полной раскраской (и число таких симплексов нечётно).

□ Достаточно доказать, что число n-мерных симплексов триангуляции с полной раскраской нечётно. По лемме 1 это эквивалентно тому, что число $(n-1)$-мерных симплексов с полной раскраской в триангуляции, индуцированной на границе Δ^n, нечётно. Из условия на цвета вершин триангуляции следует, что на границе Δ^n любой $(n-1)$-мерный симплекс с полной раскраской содержится в $(n-1)$-мерной грани Δ^n с полной раскраской. Поэтому лемма Шпернера для n-мерного симплекса следует из леммы Шпернера для $(n-1)$-мерного симплекса. При $n=0$ лемма Шпернера очевидна. ■

Лемма 3 | Если d — максимальная длина ребра симплекса Δ^n, то максимальная длина ребра барицентрического подразделения Δ^n не превосходит $\frac{n}{n+1} \cdot d$.

□ Рассмотрим например, симплекс барицентрического подразделения, соответствующий тождественной перестановке. Его вершины — $a_0, \frac{a_0+a_1}{2}, \dots, \frac{a_0+\dots+a_n}{n+1}$, где $a_0, \dots, a_n$ — вершины Δ^n. Имеем

$$\frac{a_0+\dots+a_{p+q-1}}{p+q} - \frac{a_0+\dots+a_{p-1}}{p} = \frac{q}{p+q}\left(\frac{a_p+\dots+a_{p+q-1}}{q} - \frac{a_0+\dots+a_{p-1}}{p}\right) =$$

$= \frac{q}{p+q}(a-b)$, где a и b — точки симплекса Δ^n. Осталось заметить, что $d(a,b) \le d$ и $\frac{q}{p+q} \le \frac{p+q-1}{p+q} = 1 - \frac{1}{p+q} \le \frac{n}{n+1}$, так как $p+q \le n+1$. ■

Нужен конец — другое доказательство теоремы Брауэра (равенства $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $\pi_{n-1}(D^n) = 0$ доказывать не нужно)

Доказательство теоремы Брауэра

□ Диск D^n гомеоморфен Δ^n, поэтому будем доказывать, что любое непрерывное отображение $f\colon \Delta^n \to \Delta^n$ имеет неподвижную точку. Раскрасим точки Δ^n так: если $(x_0, \dots, x_n)$ — барицентрические координаты точки $X \in \Delta^n$ и $(y_0, \dots, y_n)$ — барицентрические координаты $f(X)$, то мы красим точку X в цвет $j = \min\{i : y_i \le x_i \ne 0\}$. Цвета вершин любой триангуляции тогда удовлетворяют условию леммы Шпернера. В самом деле, если точка принадлежит грани $A_{i_0}, \dots, A_{i_k}$, то у неё отличны от нуля лишь барицентрические координаты с индексами $i_0, \dots, i_k$. По лемме Шпернера среди n-мерных симплексов барицентрического подразделения симплекса Δ^n есть симплекс Δ_1^n с полной раскраской. Выберем в нём любую точку X_1. В барицентрическом подразделении симплекса Δ_1^n тоже выберем симплекс Δ_2^n с полной раскраской и выберем в нём точку X_2, и т.д. Выберем сходящуюся подпоследовательность $(X_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ из бесконечной последовательности $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покажем, что $X = \lim_{n\to\infty} X_{i_n}$ — неподвижная точка f.

Пусть $(x_{0_k}, \dots, x_{n_k})$ и $(y_{0_k}, \dots, y_{n_k})$ — барицентрические координаты точек X_{i_k} и $f(X_{i_k})$, и пусть $(x^l_{0_k}, \dots, x^l_{n_k})$ и $(y^l_{0_k}, \dots, y^l_{n_k})$, $l = 0, \dots, n$, — барицентрические координаты вершин симплекса, содержащего точку X_{i_k}, и их образов при f. Рассматриваемые симплексы раскрашены в полный набор цветов, поэтому $\forall j = 0, \dots, n \ \exists l = 0, \dots, n$ такое, что $x^l_{j_k} \ge y^l_{j_k}$. Длина ребра симплекса $\Delta^n_{i_k}$ стремится к нулю при $k \to \infty$ (по лемме 3), поэтому $\lim_{k\to\infty} x^l_{j_k} = \lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_j$, где x_j — j-я барицентрическая координата точки X. Таким образом, если $(y_0, \dots, y_n)$ — барицентрические координаты $f(X)$, то $y_j \le x_j$ для $j = 0, \dots, n$.

▨ Но $\sum x_j = 1 = \sum y_j$, поэтому $x_j = y_j$ для $j = 0, \dots, n$.

Другое доказательство теоремы Брауэра (точнее, теоремы о неретрагируемости диска) основано на свойствах гомотопических групп сфер и дисков. Мы вкратце обсудим эти группы в следующем разделе, а здесь лишь продемонстрируем их применение к теореме о неретрагируемости:

Предположим, что существует ретракция $r\colon D^n \to S^{n-1}$. Пусть $i\colon S^{n-1} \to D^n$ — тождественное вложение. Тогда композиция $S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ — тождественное отображение, поэтому оно индуцирует тождественный гомоморфизм гомотопических групп. Но композиция $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \pi_{n-1}(S^{n-1})$

Нужно

не может быть тождественным отображением, поскольку $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $\pi_{n-1}(D^n) = \{0\}$.