Нужно следствие 5

**Следствие 5** | $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$, а также $[0,1]^n$ и $[0,1]^k$, негомеоморфны для $n \neq k$.

Для того чтобы двигаться дальше, нужны ещё леммы.

**Лемма 4** | Пусть $A$ и $B$ — подмножества пространства $X$ и $\mathcal{W}$ — счётное семейство открытых множеств такое, что для любого $W \in \mathcal{W}$ либо $\overline{W} \cap A = \varnothing$, либо $\overline{W} \cap B = \varnothing$ и $A \cup B \subset \bigcup \mathcal{W}$. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$. Если, сверх того, $\bigcup \mathcal{W} = X$, то $X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup \{\mathrm{Bd}\, W : W \in \mathcal{W}\}$.

□ Пусть $\mathcal{W} = \{W_i, W_i' : i \in \mathbb{N}\}$, где $\overline{W_i'} \cap A = \varnothing$ и $\overline{W_i} \cap B = \varnothing$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $U_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} \overline{W_j'}$ и $V_i = W_i' \setminus \bigcup_{j \le i} \overline{W_j}$. Легко видеть, что все $U_i$ и $V_j$ открыты, $U_i \cap V_j = \varnothing$ и $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ и $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ — непересекающиеся открытые множества, причём $A \subset U$ и $B \subset V$.

Теперь предположим, что $\bigcup \mathcal{W} = X$ и возьмём $x \in X \setminus (U \cup V)$. Ясно, что $x \notin W_1 = U_1 \subset U$, так что $x \in W_{m+1} \cup W_m'$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Пусть наименьшее такое $m$ равно $i$. Возможны два случая:

1) $x \in W_i'$. Поскольку $x \notin V_i \subset V$, имеем $x \in \overline{W_j}$ для некоторого $j \le i$. Если $j = 1$, то $x \in \mathrm{Bd}\, W_1$, потому что $x \notin W_1$. Если $1 < j \le i$, то $x \notin W_j$ (по определению числа $i$), и $x \in \mathrm{Bd}(W_j)$.

2) $x \notin W_i'$. Тогда $x \in W_{i+1}$, и поскольку $x \notin U_{i+1} \subset U$, имеем $x \in \overline{W_j'}$ для некоторого $j \le i$. Если $j = i$, то $x \in \mathrm{Bd}\, W_i'$. Если $j < i$, то по определению $i$ имеем $x \notin W_j'$ и, значит, $x \in \mathrm{Bd}\, W_j'$.

▨ Итак, $X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup \{\mathrm{Bd}\, W : W \in \mathcal{W}\}$.

**Лемма 5** | Пусть $Y$ — подпространство наследственно нормального пространства $X$, и пусть $(A_1, A_2)$ и $(B_1, B_2)$ — две пары непересекающихся замкнутых подмножеств $X$ такие, что $\overline{Y} \cap A_1 \subset \overline{Y} \cap \mathrm{Int}\, B_1$ и $\overline{Y} \cap A_2 \subset \overline{Y} \cap \mathrm{Int}\, B_2$. Тогда для любой перегородки $C$ между $Y \cap B_1$ и $Y \cap B_2$ в $Y$ имеется перегородка $C_1$ между $A_1$ и $A_2$ такая, что $Y \cap C_1 \subset C$.

□ Пусть $U_1$ и $U_2$ — непересекающиеся открытые окрестности (в $Y$) множеств $Y \cap B_1$ и $Y \cap B_2$ соответственно, для которых $C = Y \setminus (U_1 \cup U_2)$. Положим $V_i = \overline{Y} \setminus \overline{(Y \setminus U_i)}$ для $i = 1, 2$ (это наибольшее открытое подмножество $\overline{Y}$, чьё пересечение с $Y$ есть $U_i$). Заметим, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $\overline{Y} \cap A_i \subset \overline{Y} \cap \mathrm{Int}\, B_i \subset V_i$ для $i = 1, 2$. Значит, $A_1 \cup V_1$ и $A_2 \cup V_2$ — непересекающиеся замкнутые подмножества открытого подпространства $Z = (X \setminus \overline{Y}) \cup V_1 \cup V_2$ наследственно нормального пространства $X$. Поэтому существуют непересекающиеся открытые в $Z$ (а значит, и в $X$) множества $W_1$ и $W_2$ такие, что $A_1 \cup V_1 \subset W_1$ и $A_2 \cup V_2 \subset W_2$. Легко проверить, что $C_1 = X \setminus (W_1 \cup W_2)$ — перегородка в $X$

▨ между $A_1$ и $A_2$, причём $Y \cap C_1 \subset C$.

**Т.4** (Неравенство Урысона для Ind).[*] Пусть $X$ — наследственно нормальное пространство и $X=Y\cup Z$. Тогда $\operatorname{Ind} X \le \operatorname{Ind} Y + \operatorname{Ind} Z + 1$.

□ Индукция по $n = \operatorname{Ind} X$ (можно считать, что $\operatorname{Ind} X \ne -1, \infty$ и $\operatorname{Ind} Z \ne -1, \infty$). Пусть $A_1, A_2 \subset X$ замкнуты, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Найдём замкнутые множества $B_1, B_2 \subset X$ такие, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и $A_i \subset \operatorname{Int} B_i$ для $i=1,2$. Возьмём перегородку $C$ в $Y$ между $Y \cap B_1$ и $Y \cap B_2$ такую, что $\operatorname{Ind} C \le n-1$. По лемме 5 существует перегородка $C_1$ в $X$ между $A_1$ и $A_2$ такая, что $C_1 \cap Y \subset C$. По теореме 2 $\operatorname{Ind}(C_1 \cap Y) \le n-1$ и $\operatorname{Ind}(C_1 \cap Z) \le \operatorname{Ind} Z$. По предположению индукции $\operatorname{Ind} C_1 \le n + \operatorname{Ind} Z$.
■ Значит, $\operatorname{Ind} X \le \operatorname{Ind} Y + \operatorname{Ind} Z + 1$.

**Лемма 6** Пусть $X$ — непустое линделёфово пространство, $\operatorname{ind} X < \infty$, $A, B \subset X$ замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда между $A$ и $B$ есть перегородка $C$, которую можно представить как $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, где каждое $C_i$ замкнуто и $\operatorname{ind} C_i < \operatorname{ind} X$.

□ Поскольку $X$ регулярно и $\operatorname{ind} X < \infty$, у каждой точки $x \in X$ есть открытая окрестность $U_x$ такая, что $\overline{U_x} \cap A = \varnothing$ или $\overline{U_x} \cap B = \varnothing$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Bd} U_x < \operatorname{ind} X$. Пусть $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_x : x \in X\}$ пространства $X$. По лемме 4 найдутся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $U \cap V = \varnothing$, $A \subset U$, $B \subset V$ и $C = X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Bd} U_i$. Осталось положить $C_i = C \cap \operatorname{Bd} U_i$:
■ по теореме 1 $\operatorname{ind} C_i \le \operatorname{ind} \operatorname{Bd} U_i < \operatorname{ind} X$.

**Т.5** Для линделёфова пространства $X$ $\dim X \le \operatorname{ind} X$.

□ Если $\operatorname{ind} X = -1, \infty$, то доказывать нечего. Пусть $\operatorname{ind} X = n \ge 0$ и для меньших $n$ утверждение доказано. Рассмотрим пары $(A_i, B_i)$ непересекающихся замкнутых подмножеств $X$ для $i = 1, \ldots, n+1$. По лемме 6 найдётся перегородка $C_{n+1}$ в $X$ между $A_{n+1}$ и $B_{n+1}$ такая, что $C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n+1}^i$, где все $C_{n+1}^i$ замкнуты в $X$ и $\operatorname{ind} C_{n+1}^i < n$ (и, по индуктивному предположению, $\dim C_{n+1}^i < n$). По теореме счётной суммы для dim (следствие 2) имеем $\dim C_{n+1} < n$. По основной теореме $C_{n+1}$ содержит замкнутые множества $E_i$ и $F_i$ такие, что $A_i \cap C_{n+1} \subset E_i$, $B_i \cap C_{n+1} \subset E_i$, $E_i \cap F_i = \varnothing$ для $i \le n$ и $C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cup F_i)$. Для $i \le n$ пусть $C_i$ — любая перегородка в $X$ между $A_i \cup E_i$ и $B_i \cup F_i$. Ясно, что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$. По основной теореме $\dim X \le n$.
■ Осталось применить индукцию по $n$.

[*] Для dim (и ind) выполнены совершенно аналогичные неравенства Урысона, но нам они не понадобятся.

Нужно знать формулировку теоремы 6

**Пример** Вспомним, что множество $\mathbb{P}$ иррациональных чисел гомеоморфно произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$. Значит, $\mathbb{P}^{\kappa}$ нульмерно, т.е. $\operatorname{ind}\mathbb{P}^{\kappa}=0$, для любого кардинала $\kappa$ (потому что нульмерность мультипликативна и $\operatorname{ind}=0$ для нульмерных пространств). То же верно для любых степеней множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (которое нульмерно потому, что счётно), а также для любых произведений сомножителей, гомеоморфных $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$. Все не более чем счётные такие произведения удовлетворяют второй аксиоме счётности (поскольку сомножители имеют счётную базу) и поэтому линделёфовы. По теореме 5 для них $\dim=0$.

В частности, пусть $n\in\mathbb{N}$ и $I\subset\{1,\dots,n\}$. Для каждого $i\in I$ выберем $q_i\in\mathbb{Q}$ и положим $q=\{q_i: i\in I\}$ и $P^n_I(q)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_i=q_i$ для $i\in I$, $x_i\in\mathbb{P}$ для $i\notin I\}$. Пространство $P^n_I(q)$ гомеоморфно $\mathbb{P}^{n-|I|}$, если $|I|<n$, и одноточечно, если $n=|I|$ (т.е. $I=\{1,\dots,n\}$). Кроме того, множество $P^n_I(q)$ замкнуто в $P^n_m=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$: ровно $m$ координат $x_i$ рациональны$\}$ для $m=|I|$. Поскольку число всех $I\subset\{1,\dots,n\}$, $|I|=m$, конечно и число всех $m$-к $q$ рациональных чисел счётно, заключаем, что $P^n_m$ есть объединение счётного числа замкнутых подпространств вида $P^n_I(q)$, причём $\dim P^n_I(q)$ для всех $I$ и $q$. По теореме о счётной сумме для $\dim$ (следствие 2) $\dim P^n_m=0$ для любых $n\in\mathbb{N}$ и $m\le n$. По предложению 3 $\operatorname{Ind} P^n_m=0$ для любых $n\in\mathbb{N}$ и $m\le n$.

$\boxed{\text{Т.6}}$ Для любого $n\in\mathbb{N}$ $\dim[0,1]^n=\operatorname{ind}[0,1]^n=\operatorname{Ind}[0,1]^n=n$ и $\dim\mathbb{R}^n=\operatorname{ind}\mathbb{R}^n=\operatorname{Ind}\mathbb{R}^n=n$.

□ Поскольку $\mathbb{R}^n=\bigcup_{m=0}^{n} P^n_m$ (в обозначениях рассмотренного выше примера) и $\operatorname{Ind} P^n_m=0$ для $m\le n$, из теоремы 4 вытекает, что $\operatorname{Ind}\mathbb{R}^n\le n$. По теореме 2 $\operatorname{Ind}[0,1]^n\le n$. Равенства $\dim[0,1]^n=n$ и $\dim\mathbb{R}^n=n$ — это следствия 3 и 4. Теперь требуемые равенства вытекают из теорем 3 и 5. ■

На этом мы закончим демонстрацию используемой в теории размерности техники и ограничимся перечислением (без доказательств) нескольких примечательных фактов.

Как уже отмечалось, из следствий 3 и 4 (и, конечно, теоремы 6) вытекает негомеоморфность евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ для $m\neq k$. Это доказательство столь, казалось бы, очевидного факта трудно назвать простым. Как это ни удивительно, доказательства, которое было бы существенно проще, не существует, хотя есть доказательства, использующие другую технику (например, гомотопии). Впервые негомеоморфность $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ была строго доказана (Брауэром в 1911г. а затем и Лебегом) именно с помощью размерностных функций.

Нужны факты 1, 2 и 4 без док-ва

## Некоторые дальнейшие факты теории размерности

Ниже мы формулируем (без доказательств, но иногда с краткими комментариями) ещё несколько фактов теории размерности. В доказательствах многих из них важнейшую роль играют, наряду с перегородками, существенные семейства пар непересекающихся замкнутых множеств.

### Совпадение разных размерностей и отношения между размерностями

1. Для любого сепарабельного метризуемого пространства $X$ $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ метризуемое $X$ т., что $\dim X - \operatorname{ind} X = n$

   $\forall$ натур. $m \le n$ $\exists$ сепарабельный компакт $X$ с 1 а.с. т., что $\dim X = m$, $\operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X = n$

   $\forall l, m, n$ т., что $0 \le l \le n$ и $0 < m \le n$ $\exists$ нормальное сепарабельное пространство $X$ с 1 а.с. т., что $\operatorname{ind} X = l$, $\dim X = m$, $\operatorname{Ind} X = n$.

2. Для любого метризуемого пространства $X$ $\operatorname{Ind} X = \dim X$.
3. Для любого линделёфова пространства $X$ $\dim X \le \operatorname{ind} X$.

   $\exists$ компакт $X$, для которого $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$.

   $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\exists$ нормальное пр-во $X$, для которого $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = \dim X = n$.
4. Для любого топологического пространства $X$ $\operatorname{ind} X \le \operatorname{Ind} X$ и $\dim X \le \operatorname{Ind} X$.

### Подпространства

1. Если $Y$ — подпространство $X$, то $\operatorname{ind} Y \le \operatorname{ind} X$.
2. Если $Y$ замкнуто в $X$, то $\operatorname{Ind} Y \le \operatorname{Ind} X$ и $\dim Y \le \dim X$.

   Следствие 1) $\operatorname{ind} S^n = \dim S^n = \operatorname{Ind} S^n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($S^n$ — $n$-мерная сфера, нужно ещё использовать 1)

   2) $\operatorname{ind} [0,1]^{\aleph_0} = \dim [0,1]^{\aleph_0} = \operatorname{Ind} [0,1]^{\aleph_0} = \infty$

   $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\exists$ нормальное пространство $X$ и (незамкнутое) нормальное $Y \subset X$ такие, что $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$, $\dim Y = \operatorname{Ind} Y = n$.

3. Теорема суммы для Ind: Если $X$ нормально, $A$ и $B$ замкнуты в $X$, $X = A \cup B$, $\operatorname{Ind} A \le m$ и $\operatorname{Ind} B \le n$, где $m, n \ne -1$, то $\operatorname{Ind} X \le m + n$.

   Теорема счётной суммы для dim: Если $X$ нормально, $X_i$ замкнуты в $X$ для $i \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup X_i$ и $\dim X_i \le n$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то $\dim X \le n$.

   $\exists$ метризуемое пространство $X$ и замкнутые $A$ и $B$ в $X$ такие, что $X = A \cup B$, $\operatorname{ind} X = 1$ и $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = 0$.

   Пространство Локуциевского: $\exists$ компакт $S$ и замкнутые $S_1$ и $S_2$ в $S$ т., что $S = S_1 \cup S_2$, $\operatorname{ind} S_i = \dim S_i = \operatorname{Ind} S_i = 1$ для $i = 1, 2$ и $\dim S = 1$, $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 2$.

4. Неравенства Урысона: Если $X$ наследственно нормально и $X = Y \cup Z$, то $\operatorname{ind} X \le \operatorname{ind} Y + \operatorname{ind} Z + 1$

   Если $X$ наследственно нормально и $X = Y \cup Z$, то $\operatorname{Ind} X \le \operatorname{Ind} Y + \operatorname{Ind} Z + 1$

   Если $X$ нормально и $X = Y \cup Z$, то $\dim X \le \dim Y + \dim Z + 1$

Не нужно

⑤ Пример: Плоскость Тихонова. $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega]$, $Y = X \setminus \{\omega_1, \omega\}$

$\operatorname{ind} X = \dim X = \operatorname{Ind} X = 0$

$\operatorname{ind} Y = 0$, $\dim Y = 1$, $\operatorname{Ind} Y = \infty$

Пример: $\exists$ метризуемое пр-во $X$ и $a \in X$ т., что $\operatorname{ind} X = 1$ и $\operatorname{ind} X \setminus \{a\} = 0$.

## Разложение

Любое метризуемое пространство $X$ т., что $\dim X = n \neq -1, \infty$ есть сумма $n+1$ сильно нульмерных подпространств (т.е. $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$, $\dim X_i = 0$, причём $X_i \neq \varnothing$ для $i \leq n+1$ — иначе $\dim X < n$ по нер-ву Урысона).

## Промежуточные размерности

Если $\operatorname{Ind} X = n \in \mathbb{N}$, то $\forall m < n$, $m \geq 0$, $\exists$ замкнутое $Y \subset X$ т., что $\operatorname{Ind} Y = m$ (по определению большой индуктивной размерности).

Для метризуемых $X$ $\dim X = \operatorname{Ind} X$, поэтому если $X$ метризуемо и $\dim X = n \in \mathbb{N}$, то $\forall m < n$, $m \geq 0$, $\exists$ замкнутое $Y \subset X$ т., что $\dim Y = m$.

Однако $\exists$ метризуемый компакт $X$ т., что $\operatorname{ind} X = \infty$ и любое конечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ нульмерно.

Кроме того, $\exists$ сепарабельный компакт $X$ с 1 а.с. т., что $\dim X = n > 1$ и $X$ не содержит замкнутых подпространств $Y$ с $1 \leq \dim Y < n$.

## Компактификации

Если $X$ нормально, то $\dim X = \dim \beta X$ и $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \beta X$

Однако $\exists$ нормальное $X$ т., что $\operatorname{ind} X = 1$ и для любой компактификации $cX$ (и даже для любого регулярного $Z \supset X$) $\operatorname{ind} cX = \dim cX = \operatorname{Ind} cX$ ($= \operatorname{ind} Z = \dim Z = \operatorname{Ind} Z$) $= \infty$.

У любого сепарабельного метризуемого пространства $X$ $\exists$ (сепарабельная) метризуемая компактификация $cX$ т., что $\dim cX = \dim X$.

## Произведения

Если $X$ и $Y$ — непустые метризуемые пространства или компакты, то $\dim (X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$.

Равенство может не достигаться:

Пример Эрдёша $Q$ — подпространство $l^2$, состоящее из последовательностей с рациональными координатами. (Оно, конечно, сепарабельно и метризуемо, и $Q^2$ гомеоморфно $Q$.) Для него $\dim Q = \dim Q^2 = 1 < \dim Q + \dim Q$.

Стрелка Зоргенфрая $S$ — наследственно линделёфово наследственно сепарабельное пр-во с 1 а.с., для которого $\dim S = 0$, $\dim S^2 > 0$.

Существует также линделёфово пр-во $X$ с 1 а.с., для которого $\dim X = 0 < \dim X^2$, причём $X^2$ нормально.

Заметим, что если $X$ нульмерно (т.е. $\operatorname{ind} X = 0$), то $\operatorname{ind} X^{\kappa} = 0$ $\forall$ кардинала $\kappa$.

## Отображения

① Любое топологическое пространство есть образ пр-ва $X$ такого, что все $Y \subset X$ — паракомпакты с $\operatorname{ind} Y = \dim Y = \operatorname{Ind} = 0$, при открытом (тем более, факторном) отображении.

② Если $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ замкнуто, $X$ и $Y$ нормальны и $|f^{-1}(y)| \leq k+1$ $\forall y \in Y$, то $\dim Y \leq \dim X + k$.

③ Если $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ открыто, $X$ и $Y$ — компакты и $|f^{-1}(y)| \leq \aleph_0$ $\forall y \in Y$, то $\dim X = \dim Y$.

④ $\exists$ $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — замкнутое от-е нормальных пр-в т., что $\dim X = 1$, $\dim Y = 0$ и $\dim f^{-1}(y) = 0$ $\forall y \in Y$ (т.е. $\dim f = 0$).

⑤ Для $f: X \to Y$ положим $\dim f = \sup\{\dim f^{-1}(y) : y \in Y\}$. Если $X$ нормально, $Y$ паракомпактно $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — замкнутое отображение, то $\dim X \leq \dim f + \dim Y$.