Размерности

Понятие размерности евклидова пространства можно обобщить на произвольные топологические пространства разными способами. Имеются три классических обобщения: ind, Ind и dim. Рассмотренные выше нульмерные пространства — это в точности те X, для которых $\operatorname{ind} X = 0$, а сильно нульмерные нормальные пространства — это те X, для которых $\operatorname{Ind} X = \dim X = 0$.

Теория размерности была первоначально развита для метризуемых компактов и затем распространена на сепарабельные метризуемые пространства. На топологические пространства она обобщается только частично. В частности, фундаментальная теорема теории размерности для сепарабельных метризуемых пространств, которая утверждает, что для таких пространств ind, Ind и dim совпадают, не выполняется ни в классе всех метризуемых пространств, ни в классе всех компактов. Таким образом, для общих пространств мы фактически имеем три теории размерности, дополненные утверждениями о соотношениях между разными размерностями для разных классов пространств.

Теория размерности включает большое количество примеров, обычно сложных, и теорем, как правило, трудных и довольно специальных. Поэтому мы не сможем сколько-нибудь далеко продвинуться в её изучении и ограничимся скромной целью доказать, что $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R} = n$, хотя даже это мы не сможем выполнить в полном объёме.

Определения размерностей ind и Ind основаны на понятиях границы и/или перегородки.

Опр. Границей множества A в пространстве X называется $\operatorname{Bd}^{*)} A = \bar{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Опр. Пусть X — топологическое пространство, $A, B \subset X$ и $A \cap B = \varnothing$. Замкнутое множество $F \subset X$ называется <u>перегородкой</u> между A и B, если существуют открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ и $X \setminus F = U \cup V$.

Ясно, что если $x \in X$, $F \subset X$ — замкнутое множество, $x \notin F$, и U — открытая окрестность точки x, для которой $\bar{U} \subset X \setminus F$ (такая окрестность всегда найдётся, если X регулярно), то $\operatorname{Bd} U$ — перегородка между $\{x\}$ и F. Точно так же, если $A, B \subset X$ — замкнутые множества, $A \cap B = \varnothing$ и $U \subset X$ — открытое множество,

*) Иногда используется обозначение $\operatorname{Fr} A$.

для которого $A \subset U$ и $\overline{U} \subset X \setminus B$ (такое U всегда найдётся, если X нормально), то $\mathrm{Bd}\, U$ — перегородка между A и B.

Опр. Пусть X — регулярное[**)] пространство. Его размерность $\mathrm{ind}\, X$ — это целое число, которое определяется по индукции так:
1. $\mathrm{ind}\, X = -1$, если $X = \varnothing$;
2. $\mathrm{ind}\, X \leq n$, если для каждой точки $x \in X$ и каждой её окрестности U существует открытая окрестность $V \ni x$ такая, что $\overline{V} \subset U$ и $\mathrm{ind}\, \mathrm{Bd}\, V \leq n-1$;
3. $\mathrm{ind}\, X = n$, если $\mathrm{ind}\, X \leq n$ и неравенство $\mathrm{ind}\, X \leq n-1$ не выполнено;
4. $\mathrm{ind}\, X = \infty$, если неравенство $\mathrm{ind}\, X \leq n$ не выполнено ни для какого n.

можно потребовать просто $V \subset U$

Число $\mathrm{ind}\, X$ называется <u>малой индуктивной размерностью</u>, или размерностью Менгера—Урысона, пространства X.

Очевидно, если пространства X и Y гомеоморфны, то $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{ind}\, Y$ (т.е. малая индуктивная размерность — топологический инвариант). Легко показать, что регулярное пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда $\mathrm{ind}\, X = 0$.

Т.1 Если X — регулярное пространство и $Y \subset X$, то $\mathrm{ind}\, Y \leq \mathrm{ind}\, X$.

□ Если $\mathrm{ind}\, X = \infty$, то доказывать нечего. Предположим, что $\mathrm{ind}\, X < \infty$ и применим индукцию. Для $\mathrm{ind}\, X = -1$ утверждение тривиально. Предположим, что $\mathrm{ind}\, X = n \geq 0$ и для меньших n всё доказано. Пусть $x \in Y$ и U — окрестность точки x в Y, и пусть U_1 — окрестность x в X, для которой $U_1 \cap Y = U$. Поскольку $\mathrm{ind}\, X = n$, найдётся открытая окрестность V_1 точки x в X, для которой $\mathrm{ind}\, \mathrm{Bd}\, V_1 \leq n-1$. По индуктивному предположению $\mathrm{ind}(\mathrm{Bd}\, V_1 \cap Y) \leq n-1$. Осталось заметить, что $V_1 \cap Y$ — открытая окрестность x в Y и её граница в Y есть $\overline{V_1 \cap Y}^Y \setminus \mathrm{Int}_Y V_1 = (\overline{V_1 \cap Y}^X \cap Y) \setminus (\mathrm{Int}_X V_1 \cap Y) = \mathrm{Bd}_X V_1 \cap Y$. ■

Предл. 1 Для регулярного пространства X следующие условия равносильны:
(i) $\mathrm{ind}\, X \leq n$, где $0 \leq n < \infty$;
(ii) для любой окрестности U любой точки x найдутся открытая окрестность $V \ni x$ и замкнутое множество F такие, что $V \subset F \subset U$ и $\mathrm{ind}(F \setminus V) \leq n-1$;
(iii) между любой точкой[*)] $x \in X$ и любым замкнутым множеством F, $x \notin F$, есть перегородка C с $\mathrm{ind}\, C \leq n-1$.

□ (i) $\Rightarrow$ (ii): в качестве F можно взять $\mathrm{Bd}\, V$ из определения $\mathrm{ind}\, X$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): в качестве C можно взять $\mathrm{Bd}\, V$ из определения ind, положив $U = X \setminus F$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): пусть U — любая окрестность точки $x \in X$. Она содержит открытую окрестность W. Положим $F = X \setminus W$ и рассмотрим перегородку C между $\{x\}$ и F. По определению перегородки $X \setminus C = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 открыты, $V_1 \ni x$ и $V_2 \supset F$. Ясно, что $V_1 \subset U$ и $\mathrm{Bd}\, V_1 \subset C$! По теореме 1 $\mathrm{ind}\, \mathrm{Bd}\, V_1 \leq n-1$. ■

*) Точнее, между любым одноточечным множеством...
**) Иногда $\mathrm{ind}\, X$ определяется (так же) для любых пространств. Тогда для пространств X, не удовлетворяющих аксиоме отделимости T_3, имеем $\mathrm{ind}\, X = \infty$.

Нужные определения и теорема 3

Опр. Пусть X — нормальное[*] пространство. Размерность $\operatorname{Ind} X$ — это целое число, которое определяется по индукции так:

① $\operatorname{Ind} X = -1$, если $X = \varnothing$;

② $\operatorname{Ind} X \leq n$, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и любого открытого множества $U \supset F$ найдётся открытое множество $V \subset X$ такое, что $F \subset \overline{V} \subset U$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{Bd} V \leq n-1$;

③ $\operatorname{Ind} X = n$, если $\operatorname{Ind} X \leq n$ и неравенство $\operatorname{Ind} X \leq n-1$ не выполнено;

④ $\operatorname{Ind} X = \infty$, если неравенство $\operatorname{Ind} X \leq n$ не выполнено ни для какого n.

Число $\operatorname{Ind} X$ называется <u>большой индуктивной размерностью</u>, или размерностью Брауэра–Чеха, пространства X.

или просто $V \subset U$ — для нормальных пространств это одно и то же

Очевидно, если нормальные пространства X и Y гомеоморфны, то их большие индуктивные размерности совпадают.

$\boxed{\text{Т.2}}$ Если X — нормальное пространство и $Y \subset X$ замкнуто, то $\operatorname{Ind} Y \leq \operatorname{Ind} X$.

□ Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1. ■

Предл. 2 Для нормального пространства X следующие условия равносильны:

(i) $\operatorname{Ind} X \leq n$, где $0 \leq n < \infty$;

(ii) для любой открытой окрестности U любого замкнутого множества $F \subset X$ найдутся открытая окрестность $V \supset F$ и замкнутое множество F' такие, что $V \subset F' \subset U$ и $\operatorname{Ind}(F' \setminus V) \leq n-1$;

(iii) между любыми двумя непересекающимися замкнутыми множествами в X есть перегородка C с $\operatorname{Ind} C \leq n-1$.

□ Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 1. ■

След. Нормальное пространство X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ind} X = 0$.

$\boxed{\text{Т.3}}$ Для любого нормального пространства X $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$.

□ Если $\operatorname{Ind} X = \infty$, то доказывать нечего. Предположим, что $\operatorname{Ind} X = n < \infty$ и применим индукцию по n. Для $n = -1$ утверждение тривиально. Пусть $n \geq 0$ и для меньших размерностей всё доказано. Пусть $x \in X$ и $F \subset X$ замкнуто, $x \notin F$. Поскольку $\operatorname{Ind} X \leq n$, имеется перегородка C между $\{x\}$ и F, для которой $\operatorname{Ind} C \leq n-1$. По индуктивному предположению $\operatorname{ind} C \leq n-1$. ■

В определении размерности $\dim$ используется понятие порядка покрытия.

Опр. Пусть X — множество и $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. <u>Порядок</u> $\operatorname{ord}(\mathcal{A})$ семейства $\mathcal{A}$ — наибольшее целое n такое, что $\mathcal{A}$ содержит $n+1$ множеств с непустым пересечением. Если такого числа n нет, то $\operatorname{ord}(\mathcal{A}) = \infty$.

---

[*] Иногда $\operatorname{Ind} X$ определяется (так же) для любых пространств. Тогда для пространств, не удовлетворяющих аксиоме отделимости T_4, имеем $\operatorname{Ind} X = \infty$.

Нужно определение и импликация $\dim X \le 0 \Rightarrow \operatorname{Ind} X \le 0$ из предложения 3

Таким образом, если $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta \in B}$ и $\operatorname{ord} \mathcal{A} = n$, то для любых различных индексов $\beta_1, \dots, \beta_{n+2} \in B$ имеем $A_{\beta_1} \cap \dots \cap A_{\beta_{n+2}} = \varnothing$. Иными словами, каждая точка $x \in X$ содержится в $\le n+1$ элементах $\mathcal{A}$ и найдётся $x \in X$, которая содержится в ровно $n+1$ элементах $\mathcal{A}$. В частности, непустое семейство порядка -1 состоит из пустого множества, а семейство порядка 0 состоит из непересекающихся множеств, не все из которых пусты.

Опр.*): Для топологического пространства X
① $\dim X \le n$, если в каждое конечное открытое покрытие X можно вписать конечное открытое покрытие порядка $\le n$; (здесь $n \in \mathbb{Z}$)
② $\dim X = n$, если $\dim X \le n$ и неравенство $\dim X \le n-1$ не выполнено;
③ $\dim X = \infty$, если неравенство $\dim X \le n$ не выполнено ни при каком n.
Число $\dim X$ называется <u>лебеговой размерностью</u>, или размерностью Чеха-Лебега, или размерностью в смысле покрытий пространства X.

Ясно, что $\dim X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \varnothing$, и меньших значений $\dim$ принимать не может.

Предл. 3 Для T_1-пространства X $\dim X \le 0$ тогда и только тогда, когда X нормально и $\operatorname{Ind} X \le 0$.

□ Пусть $\dim X \le 0$, $A, B \subset X$ замкнуты и $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим (конечное) открытое покрытие $\mathcal{U}$ с $\operatorname{ord}(\mathcal{U}) \le 0$, вписанное в покрытие $\{X \setminus A, X \setminus B\}$. Поскольку элементы $\mathcal{U}$ не пересекаются, открытые множества $U = \bigcup\{W \in \mathcal{U} : W \cap A \ne \varnothing\}$ и $V = \bigcup\{W \in \mathcal{U} : W \cap A = \varnothing\}$ тоже не пересекаются. Ясно, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cup V = X$. Значит, $\operatorname{Bd} U = \varnothing$.

Пусть теперь $\operatorname{Ind} X = 0$ и $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие X. Покажем индукцией по k, что в $\mathcal{U}$ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$ так, что $V_i \subset U_i$ для $i \le k$. Для $k=1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и для меньших k всё доказано. Пользуясь индуктивным предположением, впишем в покрытие $\{U_1, \dots, U_{k-2}, U_{k-1} \cup U_k\}$ дизъюнктное открытое покрытие $\{V_1, \dots, V_{k-2}, W\}$ так, что $V_i \subset U_i$ для $i \le k-2$ и $W \subset U_{k-1} \cup U_k$. Поскольку это покрытие дизъюнктно и конечно, все его элементы (в частности, W) открыто-замкнуты. По теореме 2 и предложению 2 найдутся непересекающиеся открытые множества $V_{k-1}, V_k \subset W$ такие, что $W \setminus U_k \subset V_{k-1}$, $W \setminus U_{k-1} \subset V_k$ и $V_{k-1} \cup V_k = W$.
■ Ясно, что $V_{k-1} \subset U_{k-1}$, $V_k \subset U_k$ и $\{V_1, \dots, V_k\}$ — покрытие X.

След.: Нормальное пространство X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда $\dim X = 0$.

*) Это самое распространённое определение. Однако в некоторых весьма солидных источниках требуется, чтобы X было тихоновским, а слово "открытое" везде заменяется на "функционально открытое". Тогда можно доказать, что $\dim X = \dim \beta X$. Для нормальных пространств эти определения эквивалентны.

Не нужно

Зам. Как уже отмечалось, существуют ненормальные сильно нульмерные пространства, поэтому, вообще говоря, сильная нульмерность слабее равносильных условий $\dim X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$. Однако для нормальных пространств все три условия совпадают, а компакты нормальны, так что X сильно нульмерно $\Leftrightarrow \dim \beta X = 0$.

Опр. *Ужатием* покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества X называется любое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ со свойством $V_\alpha \subset U_\alpha$ $\forall \alpha \in A$.

Зам. Ясно, что порядок произвольного ужатия любого покрытия не превосходит порядка самого этого покрытия.

Лемма 1 Для любого пространства X и любого целого $n \geq 0$ следующие условия равносильны:
(i) $\dim X \leq n$;
(ii) всякое конечное открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_k\}$ пространства X имеет открытое ужатие $\{V_1, \dots, V_k\}$ порядка $\leq n$;
(iii) всякое открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_{n+2}\}$ пространства X, состоящее из $n+2$ элементов, имеет открытое ужатие $\{V_1, \dots, V_{n+2}\}$ такое, что $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \varnothing$.

□ (i)⇒(ii): Пусть $\{W_1, \dots, W_m\}$ — открытое покрытие порядка $\leq n$, вписанное в $\{U_1, \dots, U_k\}$. Для каждого $i \leq k$ пусть $f(i) \leq k$ таково, что $W_i \subset U_{f(i)}$. Для каждого $j \leq k$ положим $V_j = \bigcup\{W_i : f(i) = j\}$. Легко видеть, что $\{V_1, \dots, V_k\}$ — требуемое ужатие.
(ii)⇒(iii) очевидно.
(iii)⇒(i): Пусть $\{U_1, \dots, U_k\}$ — конечное открытое покрытие X. Нам надо вписать в него конечное открытое покрытие $\{W_1, \dots, W_m\}$ порядка $\leq n$. Можно считать, что $k \geq n+2$ (иначе доказывать нечего). Пусть $I_1, \dots, I_s$ — все $(n+2)$-элементные подмножества множества $\{1, \dots, k\}$, занумерованные произвольным образом. Положим $U_i^0 = U_i$ для $i \leq k$ и по индукции построим открытые покрытия $\{U_1^j, \dots, U_k^j\}$ так, что $\{U_1^j, \dots, U_k^j\}$ — ужатие покрытия $\{U_1^{j-1}, \dots, U_k^{j-1}\}$ и $\bigcap_{i\in I_j} U_i^j = \varnothing$ для всех $j = 1, \dots, s$. Предположим, что $\{U_1^{j-1}, \dots, U_k^{j-1}\}$ уже построено. Пусть i_j — наибольший элемент множества I_j. Рассмотрим $(n+2)$-элементное открытое покрытие X, состоящее из множеств U_i^{j-1} с $i \in I_j \setminus \{i_j\}$ и множества $U_0 = U_{i_j}^{j-1} \cup \bigcup_{i \notin I_j} U_i^{j-1}$. (Это покрытие заиндексировано не идущими подряд числами, но для нас это неважно — в определении ужатия индексное множество может быть любым.) Возьмём его ужатие с пустым пересечением. Пусть это ужатие состоит из множеств W_0 и W_i, где $i \in I_j \setminus \{i_j\}$.
Положим $U_i^j = W_i$ для $i \in I_j \setminus \{i_j\}$ и $U_i^j = W_0 \cap U_i^{j-1}$ для $i \notin I_j \setminus \{i_j\}$.
Получим ужатие $\{U_1^j, \dots, U_k^j\}$ покрытия $\{U_1^{j-1}, \dots, U_k^{j-1}\}$, для которого $\bigcap_{i \in I_j} U_i^j = \varnothing$. Заметим, что по построению мы также имеем $\bigcap_{i\in I_r} U_i^j = \varnothing$ для $r \leq j$.
В конце концов мы получим открытое покрытие $\{U_1^s, \dots, U_k^s\}$, которое, очевидно, является ужатием $\{U_1, \dots, U_k\}$ и обладает тем свойством, что $\bigcap_{i\in I} U_i^s = \varnothing$ для любого $(n+2)$-элементного $I \subset \{1, \dots, k\}$, т.е. имеет порядок n. Осталось положить $W_i = U_i^s$, $i \leq k$. ▨

Не нужно

След. Если X — пространство и $Y \subset X$ замкнуто, то $\dim Y \leq \dim X$.

□ Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие Y, и пусть V_i, $i \leq k$, — открытые подмножества X, для которых $U_i = V_i \cap Y$. Возьмём открытое ужатие $\{W_1, \dots, W_{k+1}\}$ порядка $\leq \dim X$ покрытия $\{V_1, \dots, V_k, X \setminus Y\}$ пространства X. Ясно, что $\{W_1 \cap Y, \dots, W_k \cap Y\}$ — открытое (в Y) ужатие $\mathcal{U}$, и оно имеет порядок $\leq \dim X$. Значит, $\dim Y \leq \dim X$. ■

Лемма 2 Любое конечное открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_k\}$ нормального пространства X имеет замкнутое ужатие $\{F_1, \dots, F_k\}$.

□ Применим индукцию по k. Для $k = 2$ утверждение леммы — это определение нормальности (в качестве непересекающихся замкнутых множеств следует рассмотреть $X \setminus U_1$ и $X \setminus U_2$). Предположим, что $k > 2$ и для меньших k всё доказано. Пусть $\{F_1, \dots, F_{k-2}, F\}$ — замкнутое ужатие покрытия $\{U_1, \dots, U_{k-2}, U_{k-1} \cup U_k\}$, и пусть $\{F_{k-1}, F_k\}$ — замкнутое ужатие покрытия $\{U_{k-1} \cap F, U_k \cap F\}$ нормального пространства F (оно нормально, потому что замкнуто в нормальном X).
■ Ясно, что $\{F_1, \dots, F_k\}$ — замкнутое ужатие $\{U_1, \dots, U_k\}$.

Лемма 3 Для семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств нормального пространства X следующие условия равносильны:
(i) существуют перегородки C_i между A_i и B_i для $i \leq n$ такие, что $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \varnothing$;
(ii) существуют непересекающиеся открытые множества U_i и V_i такие, что $A_i \subset U_i$ и $B_i \subset V_i$ для каждого $i \leq n$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cup V_i) = X$;
(iii) существуют непересекающиеся замкнутые множества D_i и E_i такие, что $A_i \subset D_i$ и $B_i \subset E_i$ для каждого $i \leq n$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cup E_i) = X$.

□ (i) ⇒ (ii): При наличии перегородок C_i с пустым пересечением достаточно взять любые непересекающиеся открытые окрестности U_i и V_i множеств A_i и B_i соответственно, для которых $X \setminus C_i = U_i \cup V_i$.
(ii) ⇒ (iii): Пусть выполнено (ii). По лемме 2 найдутся замкнутые множества S_i и T_i такие, что $S_i \subset U_i$, $T_i \subset V_i$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (S_i \cup T_i) = X$. Множества $D_i = S_i \cup A_i$ и $E_i = T_i \cup B_i$, $i \leq n$, обладают требуемыми в (iii) свойствами.
(iii) ⇒ (i): Пусть выполнено (iii), и пусть C_i — перегородка между D_i и E_i (она существует, так как X нормально) для каждого $i \leq n$. Тогда C_i является также перегородкой между A_i и B_i и $C_i \cap (D_i \cup E_i) = \varnothing$
■ для $i \leq n$; следовательно, $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \varnothing$.

Семейство $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X называется <u>несущественным</u>, если для него выполнено одно (любое) из условий в лемме 3. В противном случае такое семейство называется <u>существенным</u>. В дальнейшем мы увидим, что семейство n пар противоположных граней куба $[0,1]^n$ существенно.

Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории размерности. Она утверждает, что если X — нормальное пространство и $n \geq 0$, то $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда любое семейство $n+1$ пары непересекающихся замкнутых множеств в X несущественно.

Не нужно

Основная теорема Для нормального пространства X и $n \geq 0$ следующие условия равносильны:

① $\dim X \leq n$.

② Для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых множеств в X существуют перегородки C_i между A_i и B_i для $i \leq n+1$ такие, что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

③ Для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых множеств в X существуют непересекающиеся открытые множества U_i и V_i, $i \leq n+1$, такие, что $A_i \subset U_i$ и $B_i \subset V_i$ для $i \leq n+1$ и $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i \cup V_i) = X$.

④ Для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых множеств в X существуют непересекающиеся замкнутые множества D_i и E_i для $i \leq n+1$ такие, что $A_i \subset D_i$ и $B_i \subset E_i$ для $i \leq n+1$ и $\bigcup_{i=1}^{n+1} (D_i \cup E_i) = X$.

□ Условия ②, ③ и ④ равносильны по лемме 3.

①⇒②: Всевозможные пересечения вида $\bigcap_{i=1}^{n+1} O_i$, где каждое O_i — либо $X \setminus A_i$, либо $X \setminus B_i$, образуют конечное открытое покрытие $\mathcal{O}$ пространства X. В силу ① найдется открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ порядка $\leq n$, вписанное в $\mathcal{O}$. Будем считать без ограничения общности, что $U_i \neq U_j$ для $i \neq j$. По лемме 2 у $\mathcal{U}$ есть замкнутое ужатие $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$. Для $1 \leq j \leq m$ по индукции мы найдём открытые множества $V_{1,j}, \dots, V_{n+1,j}$ и замкнутые множества $D_{1,j}, \dots, D_{n+1,j}$ в (нормальном) пространстве X такие, что $F_j \subset V_{i,j} \subset D_{i,j} \subset V_{i+1,j} \subset D_{i+1,j} \subset U_j$ для всех $i = 1, \dots, n$. Для $i = 1, \dots, n+1$ положим $N_i = \{j : 1 \leq j \leq m,\ A_i \cap U_j \neq \emptyset\}$, а также $V_i = \bigcup_{j \in N_i} V_{i,j}$, $D_i = \bigcup_{j \in N_i} D_{i,j}$ и $C_i = D_i \setminus V_i$. Если $A_i \cap U_j \neq \emptyset$, то по определению покрытия $\mathcal{O}$ имеем $U_j \subset X \setminus B_i$. Отсюда вытекает, что открытое множество V_i и замкнутое множество D_i таковы, что $A_i \subset V_i \subset D_i \subset X \setminus B_i$; значит, C_i — перегородка между A_i и B_i. Предположим, что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \neq \emptyset$ и возьмём точку $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$. Для каждого i имеем $x \in D_i \setminus V_i$; значит, для некоторого $j = j(i) \in N_i$ $x \in D_{i,j(i)} \setminus V_{i,j(i)}$, откуда $x \in U_{j(i)}$ и $x \notin F_{j(i)}$. Поскольку $D_{i,j(i)} \subset V_{k,j(i)}$ для $i < k$, все индексы $j(1), \dots, j(n+1)$ различны, а поскольку $\mathcal{F}$ — покрытие X, имеем $x \in F_{j_0}$ для ещё одного, отличающегося от $j(i)$, $i \leq n+1$, индекса j_0. Значит, $x \in U_j$ для $(n+2)$-х разных j — противоречие с $\operatorname{ord} \mathcal{U} \leq n$. Стало быть, $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

②⇒①: По лемме 2 у любого открытого покрытия $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{n+2}\}$ пространства X есть замкнутое ужатие $\{F_1, \dots, F_{n+2}\}$. Для каждого $i \leq n+1$ пусть C_i — перегородка между F_i и $X \setminus U_i$, и пусть $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$. Возьмём непересекающиеся открытые множества V_i и W_i такие, что $F_i \subset V_i$, $X \setminus U_i \subset W_i$ и $C_i = X \setminus (V_i \cup W_i)$ для каждого $i \leq n+1$. Заметим, что $V_i \subset U_i$ для $i \leq n+1$ и $(\bigcup V_i) \cup (\bigcup W_i) = \bigcup (V_i \cup W_i) = X$. Следовательно, $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{n+1}, V_{n+2}\}$, где $V_{n+2} = U_{n+2} \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i)$ — открытое ужатие $\mathcal{U}$. Кроме того, $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i \cap W_i) = \emptyset$. По лемме 1 $\dim X \leq n$. ▨

Нужно знать формулировки без доказательства

След. 1 | Для произвольного нормального пространства X $\dim X \le \operatorname{Ind} X$.

☐ Будем считать без ограничения общности, что $\operatorname{Ind} X \ne -1, \infty$. Применим индукцию. Предположим, что $\operatorname{Ind} X = n \ge 0$ и для всех нормальных Y с $\operatorname{Ind} Y < n$ утверждение доказано. Рассмотрим семейство $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых множеств в X. Возьмём перегородку C_{n+1} между A_{n+1} и B_{n+1}, для которой $\operatorname{Ind} C_{n+1} \le n-1$. По индуктивному предположению $\dim C_{n+1} \le n-1$, поэтому по основной теореме для $1 \le i \le n$ найдутся пары (D_i, E_i) непересекающихся замкнутых подмножеств C_{n+1} такие, что $C_{n+1} \cap A_i \subset D_i$, $C_{n+1} \cap B_i \subset E_i$ и $\bigcup_{i=1}^{n}(D_i \cup E_i) = C_{n+1}$. Для $1 \le i \le n$ пусть C_i — любая перегородка между $A_i \cup D_i$ и $B_i \cup E_i$. Очевидно, $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$, и по основной теореме
▨ $\dim X \le n$.

След. 2 | (теорема счётной суммы для размерности $\dim$). Пусть X — нормальное пространство, и пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где все X_i — замкнутые подпространства X с $\dim X_i \le n$. Тогда $\dim X \le n$.

☐ Для $n = -1$ и $n = \infty$ доказывать нечего; пусть $n \ge 0$ — целое число. Рассмотрим семейство $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств X. Пользуясь нормальностью X, найдём открытые множества $U_{i,0}$ и $V_{i,0}$ такие, что $A_i \subset U_{i,0}$, $B_i \subset V_{i,0}$ и $\overline{U_{i,0}} \cap \overline{V_{i,0}} = \varnothing$. Положим $X_0 = \varnothing$. Для $1 \le i \le n+1$ и каждого целого $m \ge 0$ мы построим по индукции открытые подмножества $U_{i,m}$ и $V_{i,m}$ пространства X такие, что

а) $\overline{U_{i,m-1}} \subset U_{i,m}$ и $\overline{V_{i,m-1}} \subset V_{i,m}$,

б) $\overline{U_{i,m}} \cap \overline{V_{i,m}} = \varnothing$ и

в) $\bigcup_{j=0}^{m} X_j \subset \bigcup_{i=1}^{n+1}(U_{i,m} \cup V_{i,m})$.

Применим индукцию по m. Для $m = 0$ мы уже построили $U_{i,0}$ и $V_{i,0}$. Предположим, что $m > 0$ и для меньших m всё построено. Применив основную теорему к X_m, мы построим непересекающиеся замкнутые подмножества E_i и F_i пространства X_m такие, что $X_m \cap \overline{U_{i,m-1}} \subset E_i$, $X_m \cap \overline{V_{i,m-1}} \subset F_i$ и $X_m = \bigcup_{i=1}^{n+1}(E_i \cup F_i)$. Осталось определить $U_{i,m}$ и $V_{i,m}$ как любые открытые множества в X такие, что $\overline{U_{i,m-1}} \cup E_i \subset U_{i,m}$, $\overline{V_{i,m-1}} \cup F_i \subset V_{i,m}$ и $\overline{U_{i,m}} \cap \overline{V_{i,m}} = \varnothing$.

Построив открытые множества $U_{i,m}$ и $V_{i,m}$ для всех $i \le n+1$ и $m \ge 0$, мы положим $U_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{i,m}$ и $V_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{i,m}$ для $i = 1, \dots, n+1$. Тогда U_i и V_i — непересекающиеся открытые множества, $A_i \subset U_i$, $B_i \subset V_i$ и
▨ $\bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i \cup V_i) = X$. По основной теореме $\dim X \le n$.

Следующее следствие, которое приближает нас к нашей цели, использует теорему Брауэра о неподвижной точке.

Напомним, что *неподвижной точкой* отображения $f\colon X \to X$ множества X в себя называется любая точка $x \in X$, для которой $f(x) = x$. *Теорема Брауэра о неподвижной точке* утверждает, что любое непрерывное отображение $[0,1]^n \to [0,1]^n$, где n — любое натуральное число, имеет неподвижную точку. Мы обсудим подходы к её доказательству чуть позже, а пока просто примем на веру.

След. 3 | $\dim [0,1]^n = n$ для любого натурального n.

□ Сперва покажем, что $\dim [0,1]^n \le n$. Рассмотрим пары (A_i, B_i) дизъюнктных замкнутых подмножеств $[0,1]^n$ для $i = 1, \dots, n+1$. Пусть Q_i, $i = 1, \dots, n+1$, — попарно непересекающиеся всюду плотные подмножества $\mathbb{R}$ (их нетрудно выделить из множества рациональных чисел). Каждая точка $x \in A_i$ имеет в $\mathbb{R}^n$ открытую окрестность вида $V_x = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$, где $a_j, b_j \in Q_i$ и $\overline{V_x}^{\mathbb{R}^n} \cap B_i = \varnothing$. Заметим, что по меньшей мере одна координата каждой точки границы $\mathrm{Bd}_{\mathbb{R}^n} V_x$ множества V_x в $\mathbb{R}^n$ принадлежит множеству Q_i. Поскольку компакт A_i можно покрыть конечным числом таких множеств, найдётся открытое множество V_i в $\mathbb{R}^n$ такое, что $A_i \subset V_i$, $\overline{V_i}^{\mathbb{R}^n} \cap B_i = \varnothing$ и по меньшей мере одна координата каждой точки границы $\mathrm{Bd}_{\mathbb{R}^n} V_i$ принадлежит Q_i. Заметим, что каждое пересечение $C_i = [0,1]^n \cap \mathrm{Bd}_{\mathbb{R}^n}(V_i)$ есть перегородка в $[0,1]^n$ между A_i и B_i, и $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$. По основной теореме $\dim [0,1]^n \le n$.

Теперь покажем, что $\dim [0,1]^n \ge n$. Предположим, что, напротив, $\dim [0,1]^n \le n-1$ и рассмотрим n пар (A_i, B_i), $i \le n$, противоположных граней куба $[0,1]^n$: $A_i = \{(x_j)_{j \le n} \in [0,1]^n : x_i = 1\}$, $B_i = \{(x_j)_{j \le n} \in [0,1]^n : x_i = 0\}$. По основной теореме найдутся пары (D_i, E_i) непересекающихся замкнутых множеств таких, что $A_i \subset D_i$, $B_i \subset E_i$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cup E_i) = [0,1]^n$. Пусть $f_i\colon [0,1]^n \to [0,1]$ — непрерывное отображение такое, что $f_i(D_i) = \{0\}$ и $f_i(E_i) = \{1\}$. Рассмотрим диагональ $f = \Delta_{i \le n} f_i \colon [0,1]^n \to [0,1]^n$. Поскольку $\bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cup E_i) = [0,1]^n$, f отображает куб $[0,1]^n$ на его границу $\partial [0,1]^n$. Если $(x_j)_{j \le n} \in \partial [0,1]^n$, то для некоторого $i \le n$ имеем $x_i = 1$ или $x_i = 0$; в первом случае $(x_j)_{j \le n} \in A_i \subset D_i$ и $f_i((x_j)_{j \le n}) = 0$, а во втором $(x_j) \in B_i \subset E_i$ и $f_i((x_j)_{j \le n}) = 1$. Таким образом, $f(x) \ne x$ для каждого $x \in [0,1]^n$, что противоречит теореме Брауэра о неподвижной точке. ▨

След. 4 | $\dim \mathbb{R}^n = n$

□ По следствию из леммы 1 имеем $\dim \mathbb{R}^n \ge n$. Из следствий 2 и 3 вытекает, что $\dim \mathbb{R}^n \le n$ (потому что $\mathbb{R}^n$ есть объединение счётного числа растущих n-мерных кубов). ▨