Надо

Связность и различные виды несвязности

Опр. Топологическое пространство X называется <u>связным</u>, если X нельзя представить в виде $X_1 \oplus X_2$, где X_1 и X_2 — непустые подпространства X.

Иными словами, X связно, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых (или замкнутых) непустых подмножеств.

Т.1 Для произвольного топологического пространства X следующие условия равносильны:
① X связно;
② единственные открыто-замкнутые подмножества X — $\emptyset$ и X;
③ если $X = X_1 \cup X_2$ и множества X_1 и X_2 отделены (т.е. $X_1 \cap \overline{X_2} = \overline{X_1} \cap X_2 = \emptyset$), то X_1 или X_2 пусто;
④ каждое непрерывное отображение $f: X \to \{0, 1\}$*) постоянно, т.е. либо $f(X) \subset \{0\}$, либо $f(X) \subset \{1\}$.

□ ① ⇒ ②: Если Y открыто-замкнуто в X, то $X = Y \oplus X \setminus Y$.
② ⇒ ③ $X_1 = X \setminus X_2 = X \setminus \overline{X_2}$ и $X_2 = X \setminus \overline{X_1}$, оба открыты;
кроме того, $X_1 = X \setminus X_2 = \overline{X_1}$ и $X_2 = X \setminus X_1 = \overline{X_2}$, оба замкнуты.
③ ⇒ ④ $f^{-1}(\{0\})$ и $f^{-1}(\{1\})$ открыто-замкнуты (по непрерывности).
■ ④ ⇒ ① $X = f^{-1}(\{0\}) \oplus f^{-1}(\{1\})$.

След. Каждое связное тихоновское пространство, в котором есть хотя бы две различные точки, имеет мощность $\geq 2^{\aleph_0}$.

□ Пусть X связно, $X \in T_{3\frac{1}{2}} + T_1$, и пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Поскольку X тихоновское, существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$ такая, что $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 1$. Если бы нашлось $r \in [0, 1] \setminus f(X)$, то мы бы имели $X = \{x : f(x) < r\} \oplus \{x : f(x) > r\}$,
■ но X связно. Значит, $f(X) = [0, 1]$ и $|X| \geq 2^{\aleph_0}$.

Т.2 Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

□■ Если $f: X \to Y$ непрерывно и $Y = Y_1 \oplus Y_2$, то $X = f^{-1}(Y_1) \oplus f^{-1}(Y_2)$.

Как мы видели, $\mathbb{R}$ связно, откуда сразу получается теорема Больцано о промежуточном значении.

---

*) Здесь и в других местах под $\{0, 1\}$ всегда подразумевается множество $\{0, 1\}$ с дискретной топологией, т.е. подпространство $\mathbb{R}$.

Нужны след 1, след 2 и след 3 (их можно просто доказать непосредственно)

Т.3 Подпространство Y топологического пространства связно в том и только том случае, если, каковы бы ни были отделённые подмножества $X_1, X_2 \subset X$ такие, что $Y = X_1 \cup X_2$, всегда либо $X_1 = \varnothing$, либо $X_2 = \varnothing$.

□ Если $Y = X_1 \cup X_2$ и X_1, X_2 отделены в X, то они отделены и в Y. По теореме 1 ③ имеем $X_1 = \varnothing$ или $X_2 = \varnothing$.

Обратно, если Y не связно, то $Y = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 отделены в Y, т.е. $X_1 \cap \overline{X_2}^Y = \overline{X_1}^Y \cap X_2 = \varnothing$. Ясно, что X_1 и X_2 отделены также и в X (поскольку $X_1, X_2 \subset Y$). ■

След. Если $Y \subset X$ и Y связно, то для любых двух отделённых множеств $X_1, X_2 \subset X$ таких, что $Y \subset X_1 \cup X_2$, либо $X_1 \supset Y$, либо $X_2 \supset Y$.

Т.4 Пусть Y_α, $\alpha \in A$, — связные подпространства X. Если $\exists \alpha_0 \in A$ такое, что Y_{α_0} не отделено ни от одного Y_α, то объединение $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ связно.

□ Пусть $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 отделены в X. Тогда либо $Y_{\alpha_0} \subset X_1$, либо $Y_{\alpha_0} \subset X_2$. Пусть $Y_{\alpha_0} \subset X_1$. Для всех прочих $\alpha \in A$ тоже имеем либо $Y_\alpha \subset X_1$, либо $Y_\alpha \subset X_2$. Поскольку Y_α и Y_{α_0} не отделены, обязательно $Y_\alpha \subset X_1$. Значит, $Y \subset X_1$. ■

В частности, если все Y_α имеют общую предельную точку и эта точка принадлежит хотя бы одному Y_{α_0}, то $\bigcup Y_\alpha$ связно.

След.1 Если $Y_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$, все Y_α связны и $\bigcap Y_\alpha \neq \varnothing$, то $\bigcup Y_\alpha$ связно.

След.2 Если $Y \subset X$, Y связно и $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, то Z связно.

□ Семейство $\{Y\} \cup \{\{z\}\}_{z \in Z}$ удовлетворяет условиям теоремы 4. ■

След.3 Если любые две точки $x, y \in X$ содержатся в некотором связном подпространстве $Y \subset X$, то X связно.

□ Нужно зафиксировать любую точку $x_0 \in X$, рассмотреть связные подпространства $Y_x \ni x_0, x$ для $x \in X$ и применить следствие 1. ■

Нужные определения

Т.5 Произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, где $X_\alpha \neq \varnothing$ при всех $\alpha \in A$, связно в том и только том случае, если все пространства X_α связны.

□ Если $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно, то все X_α связны, поскольку они являются непрерывными образами $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Покажем, что если X и Y связны, то $X \times Y$ связно. Действительно, любые две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в $X \times Y$ принадлежат множеству $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$, которое связно, будучи объединением связных пересекающихся множеств.

Отсюда немедленно вытекает, что произведение любого конечного множества связных пространств связно.

Рассмотрим произвольное произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Зафиксируем любую точку $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Положим $\mathcal{F} = \{F \subset A : F \text{ конечно}\}$ и $X_F = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, где $Y_\alpha = \{x_\alpha\}$, если $\alpha \notin F$, и $Y_\alpha = X_\alpha$, если $\alpha \in F$. Каждое X_F гомеоморфно конечному произведению связных пространств и потому связно. Поскольку $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X_F$ $\forall F \in \mathcal{F}$, объединение $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} X_F$ связно. Легко видеть, что это объединение плотно в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, поэтому $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно. ■

След. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ и тихоновские кубы $[0,1]^\kappa$ связны.

Опр. <u>Континуум</u> — это связный компакт.

Опр. <u>Компонента</u> точки x в топологическом пространстве X — это объединение всех связных подпространств X, содержащих x.

Иными словами, компонента — максимальное связное множество, содержащее x: она связна, будучи объединением пересекающихся связных множеств, и, очевидно, содержит любое связное множество, содержащее x. Кроме того, компонента любой точки замкнута, потому что замыкание связного множества связно.

Ясно, что компоненты двух разных точек либо не пересекаются, либо совпадают, так что в совокупности компоненты составляют разбиение пространства X на попарно непересекающиеся связные замкнутые множества, которые называются <u>компонентами</u> пространства X.

Т.6 Компонента точки $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в пространстве $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ равна произведению $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$, где C_α — компонента x_α в X_α.

Надо начинать с определения

□ Пусть C — компонента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. При каждом $\alpha\in A$ $p_\alpha(C)$ связно, значит, $C_\alpha\supset p_\alpha(C)$, откуда $C\subset\prod_{\alpha\in A}C_\alpha$. С другой стороны, $C\supset\prod_{\alpha\in A}C_\alpha$, потому что $\prod_{\alpha\in A}C_\alpha$ связно по теореме 5. ■

Опр. <u>Квазикомпонентой</u> точки x в топологическом пространстве X называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств X, содержащих x.

Ясно, что квазикомпоненты всех точек замкнуты, и квазикомпоненты разных точек либо не пересекаются, либо совпадают, поэтому они тоже образуют разбиение пространства на попарно непересекающиеся замкнутые множества, которые называются <u>квазикомпонентами пространства</u>.

Т.7 Компонента C точки x в топологическом пространстве X содержится в квазикомпоненте Q точки x.

□ Пусть F — любое открыто-замкнутое множество в X, $x\in F$. Множества F и $X\setminus F$ и, тем более, $C\cap F$ и $C\setminus F$ отделены, и поскольку $C\cap F\neq\varnothing$, по следствию из теоремы 3 имеем $C\subset F$. ■

Т.8 Во всяком компакте X компонента любой точки $x\in X$ совпадает с её квазикомпонентой.

□ В силу теоремы 7 достаточно показать, что любая квазикомпонента компакта связна.

Пусть Q — квазикомпонента точки $x\in X$ и $Q=X_1\cup X_2$, где X_1 и X_2 — замкнутые подмножества Q, $x\in X_1$, $X_1\cap X_2=\varnothing$. Поскольку X — компакт (а значит, нормален), найдутся открытые множества U и V в X такие, что $X_1\subset U$, $X_2\subset V$ и $U\cap V=\varnothing$. Имеем $Q\subset U\cup V$. По определению квазикомпоненты $Q=\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$, где каждое F_α замкнуто (и открыто). Множества $U_\alpha=X\setminus F_\alpha$ образуют открытое покрытие компакта $X\setminus(U\cup V)$. Пусть $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $F=\bigcap_{i\le n}F_{\alpha_i}\subset U\cup V$.
Ясно, что F открыто-замкнуто; при этом $\overline{U\cap F}=\overline{U}\cap F=\overline{U}\cap(U\cup V)\cap F=U\cap F$ и, значит, $U\cap F$ открыто-замкнуто. Но $x\in U\cap F$, поэтому $Q\subset U\cap F$ и $X_2\subset Q\subset U\cap F\subset U$.
Поскольку $X_2\subset V$ и $U\cap V=\varnothing$, имеем $X_2=\varnothing$. Значит, Q связно. ■

Для некомпактных X это не так: рассмотрим $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([0,1]\times\{1/n\})\cup\{(0,0)\}\cup\{(1,0)\}\subset\mathbb{R}^2$. Компоненты X — это отрезки $[0,1]\times\{1/n\}$ и точки $\{(0,0)\}$ и $\{(1,0)\}$, тогда как квазикомпоненты — $[0,1]\times\{\frac{1}{n}\}$, $n\in\mathbb{N}$, и $\{(0,0),(1,0)\}$.

Надо опр. и зам.

Действительно, каждый отрезок $[0,1]\times\{\frac{1}{n}\}$ есть открыто-замкнутое связное подмножество X. Любое открыто-замкнутое множество, содержащее $(0,0)$, обязано содержать также и почти все (все, кроме конечного числа) отрезки $[0,1]\times\{\frac{1}{n}\}$, а значит, в силу замкнутости, и их предельную точку $(1,0)$.

Опр. Топологическое пространство <u>вполне несвязно</u>, если оно не содержит связных подпространств, имеющих более одной точки, т.е. если все его компоненты одноточечны.

Зам. Легко видеть, что тихоновское пространство X связно тогда и только тогда, когда βX связно: если X связно, то βX связно как замыкание связного множества, а если X несвязно, то $X = X_1 \oplus X_2$, где X_1 и X_2 открыто-замкнуты и не пересекаются; значит, функция $f\colon X\to[0,1]$, определённая правилом $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in X_1,\\ 1, & \text{если } x\in X_2\end{cases}$ непрерывна на X и должна продолжаться до непрерывной функции $\bar f$ на βX. Поскольку $\bar X=\beta X$, $\bar f(\beta X)\subset\{0,1\}$, что влечёт несвязность βX.

Однако есть примеры, показывающие, что для вполне несвязного X βX не обязано быть вполне несвязным. Это вполне ожидаемо, потому что, как мы видели, для βX вполне несвязность равносильна тому, что все квазикомпоненты одноточечны*), тогда как для самого X квазикомпоненты могут отличаться от компонент. Приведённый выше пример пространства с этим свойством не вполне несвязен, однако существуют и вполне несвязные примеры. Мы их приводить не будем, но зато приведём пример пространства с одноточечными квазикомпонентами (тем более, компонентами), для которого стоун-чеховская компактификация не вполне несвязна.

Пример (Эрдёш) Пусть $X\subset l^2$, X состоит из последовательностей $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2<\infty$ (напомним, что метрика на l^2 порождается нормой $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$).

Пространство X вполне несвязно: если $(r_n')\in X$, $(r_n'')\in X$ и $(r_n')\neq(r_n'')$, то найдётся $n_0\in\mathbb{N}$, для которого $r'_{n_0}\neq r''_{n_0}$; пусть t — иррациональное число между r'_{n_0} и r''_{n_0}. Множество $\{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X : r_{n_0}<t\}$ открыто-замкнуто и содержит ровно одну из данных точек. Таким образом, никакие две разные точки не содержатся в одном связном множестве и даже разделяются <u>открыто-замкнутыми множествами</u>, т.е. квазикомпоненты одноточечны.

*) Иногда пространства с одноточечными квазикомпонентами называют <u>вполне разрывными</u>, хотя в других источниках так называют пространства, в которых одноточечны все континуумы.

Не надо

Пусть $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ — точка X, все координаты которой равны 0. Покажем, что никакая открытая окрестность U точки $\mathbf{0}$, содержащаяся в шаре $B_d(\mathbf{0}, 1)$, не замкнута.

Определим по индукции последовательность $r_1, r_2, \ldots$ рациональных чисел, удовлетворяющую условиям $\mathbf{r}_k = (r_1, \ldots, r_k, 0, 0, \ldots) \in U$ и $d(\mathbf{r}_k, X \setminus U) \le \frac{1}{k}$. Очевидно, для $r_1 = 0$ имеем $\mathbf{r}_1 \in U$ и $d(\mathbf{r}_1, X \setminus U) \le 1$. Пусть $r_1, \ldots, r_{n-1}$ построены. Последовательность $\mathbf{x}_i^n = (a_1, \ldots, a_{n-1}, \frac{i}{n}, 0, 0, \ldots)$ принадлежит X для $i = 0, \ldots, n$. Поскольку $\mathbf{x}_0^n \in U$ и $\mathbf{x}_n^n \notin U$, найдётся $m < n$, для которого $\mathbf{x}_m^n \in U$ и $\mathbf{x}_{m+1}^n \notin U$. Положим $r_n = \frac{m}{n}$. Для построенной последовательности $\mathbf{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имеем $\sum r_n^2 \le 1$, значит, $\mathbf{r} \in X$. С другой стороны, $\mathbf{r} \in \overline{U} \cap (\overline{X \setminus U}) = \overline{U} \cap X \setminus U = \overline{U} \setminus U$; значит, U не замкнута.

Итак, пространство X вполне несвязно; более того, все его квазикомпоненты одноточечны, однако βX не вполне несвязно: как мы видели, все квазикомпоненты вполне несвязного компакта обязаны быть одноточечными, поэтому если бы βX было вполне несвязным, мы могли бы объявить базой новой топологии на βX все открыто-замкнутые подмножества βX;[*] в результате мы получили бы хаусдорфову топологию на βX, более слабую, чем исходная и, следовательно, совпадающую с исходной (топологию компакта нельзя ослабить — любое взаимно однозначное отображение на хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм). Таким образом, открыто-замкнутые подмножества βX образовывали бы базу βX, а их пересечения с X являлись бы состоящей из открыто-замкнутых множеств базой X, а такой базы у X нет — открытый шар $B_d(\mathbf{0}, 1)$ не содержит открыто-замкнутых множеств.

Итак, мы уже столкнулись с тремя классами "очень несвязных" пространств — вполне несвязного пространства, пространства с одноточечными квазикомпонентами и пространства с базой из открыто-замкнутых множеств; каждый следующий класс содержится в предыдущем и не совпадает с ним (даже если ограничиться лишь метризуемыми пространствами), однако в присутствии компактности все эти классы совпадают (как видно из заключительного рассуждения в примере). На самом деле вполне несвязные компакты обладают ещё более сильным свойством, которое определяет ещё более узкий класс пространств в общем случае.

---

*) Не следует забывать, что дополнения до открыто-замкнутых множеств тоже открыто-замкнуты.

Надо опр. нульмерности,
опр. сильной нульмерности: X сильно нульмерно, если βX нульмерно
Теорема 9 остаётся верной, но становится простой (она нужна)

Опр. Топологическое пространство называется <u>нульмерным</u>, если оно непусто, является T_1-пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств.

Ясно, что всякое нульмерное пространство тихоновское: функция, тождественно равная 1 на открыто-замкнутом множестве и 0 на его дополнении, непрерывна.

Напомним, что множество функционально открыто (функционально замкнуто), если оно является дополнением до прообраза 0 (прообразом 0) при непрерывном отображении в отрезок $[0,1]$ (или, что то же самое, в $\mathbb{R}$). Покрытие пространства функционально открытыми множествами будем называть <u>функционально открытым покрытием</u>.

Опр. Топологическое пространство называется <u>сильно нульмерным</u>, если оно непусто и вполне регулярно и в каждое его конечное функционально открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие попарно непересекающимися множествами (т.е. конечное <u>дизъюнктное</u> открытое покрытие).

Ясно, что любое конечное дизъюнктное открытое покрытие состоит из открыто-замкнутых множеств и потому функционально открыто.

Т.9 Для непустого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:
① X сильно нульмерно;
② для любых двух функционально отделённых множеств $A, B \subset X$ (т.е. таких, что $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$ для некоторой непрерывной функции $f: X \to [0,1]$) существует открыто-замкнутое множество U такое, что $A \subset U \subset X \setminus B$.

□ ① ⇒ ② Пусть $f: X \to [0,1]$ — непрерывная функция, $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$. Множества $f^{-1}((0,1])$ и $f^{-1}([0,1))$ составляют функционально открытое покрытие X. Возьмём какое-нибудь дизъюнктное открытое покрытие $\mathcal{U}$, вписанное в это покрытие. Очевидно, множество $U = \bigcup\{V \in \mathcal{U} : A \cap V \neq \varnothing\}$ открыто-замкнуто, $A \subset U$ и $B \subset X \setminus U$.
② ⇒ ① Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ — конечное функционально открытое покрытие X. Если $k=1$, то в него, ясно, можно вписать дизъюнктное конечное открытое покрытие $\{V_1\}$, где $V_1 = U_1$, причём $V_1 \subset U_1$ (тривиально). Рассуждая по индукции, предположим, что мы

Нужно только первое следствие

уже показали, что если $k<n$, то в $\{U_i\}_{i=1}^k$ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^k$ так, что $V_i \subset U_i$ для $i \le k$. Предположим, что $k=n$. По индуктивному предположению в $\{U_1, \dots, U_{n-2}, U_{n-1} \cup U_n\}$ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие $\{W_1, \dots, W_{n-1}\}$ так, что $W_i \subset U_i$ для $i<n-1$ и $W_{n-1} \subset U_{n-1} \cup U_n$. Множества $W_{n-1} \setminus U_{n-1}$ и $W_{n-1} \setminus U_n$ не пересекаются и функционально замкнуты (действительно, пусть $f: X \to [0,1]$ такова, что $f|_{W_{n-1}} \equiv 0$ и $f|_{X \setminus W_{n-1}} \equiv 1$; она непрерывна. Пусть $g: X \to [0,1]$ — непрерывная функция и $U_{n-1} = g^{-1}((0,1])$. Тогда $W_{n-1} \setminus U_{n-1} = (f+g)^{-1}(\{0\})$. Аналогично для U_n). Значит, эти множества функционально отделены (действительно, если $\varphi, \psi: X \to [0,1]$ непрерывны, $W_{n-1} \setminus U_{n-1} = \varphi^{-1}(\{0\})$ и $W_{n-1} \setminus U_n = \psi^{-1}(\{0\})$, то $\xi = \frac{\varphi}{\varphi+\psi}: X \to [0,1]$ непрерывна, $W_{n-1} \setminus U_{n-1} = \xi^{-1}(\{0\})$ и $W_{n-1} \setminus U_n = \xi^{-1}(\{1\})$). Значит, существует открыто-замкнутое множество U такое, что $W_{n-1} \setminus U_{n-1} \subset U$ и $W_{n-1} \setminus U_n \subset X \setminus U$. Ясно, что $W_{n-1} \setminus U \subset U_{n-1}$ и $W_{n-1} \cap U \subset U_n$.
∎ Осталось положить $V_i = W_i$ для $i<n-1$, $V_{n-1} = W_{n-1} \setminus U$ и $V_n = W_{n-1} \cap U$.

След. | Каждое сильно нульмерное пространство нульмерно.

□ Действительно, в тихоновском пространстве (а все сильно нульмерные таковы по определению) любая точка функционально отделена от дополнения до всякой своей окрестности. Применяя теорему, видим, что любая окрестность любой точки содержит открыто-замкнутую окрестность этой точки. ∎

Т.10 | Каждое нульмерное линделёфово пространство сильно нульмерно.

□ Пусть X линделёфово, A и B замкнуты в X, $A \cap B = \varnothing$. Для каждого $x \in X$ выберем открыто-замкнутое множество W_x, содержащее x и не пересекающее хотя бы одно из множеств A и B. Пусть $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — счётное подпокрытие покрытия $\{W_x\}_{x \in X}$. Множества $U_i = W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j}$, где $i = 1, 2, \dots$, открыто-замкнуты, не пересекаются и покрывают X. Множество $U = \bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \varnothing\}$ открыто-замкнуто, содержит A и не пересекается с B. ∎

След. | Каждое непустое не более чем счётное регулярное пространство сильно нульмерно.

□ Если $|X| \le \aleph_0$, то X линделёфово (при условии регулярности) и, значит, вполне регулярно. Для $x \in X$ и любой окрестности U точки x пусть $f: X \to [0,1]$ — непрерывная функция, $f(x)=0$, $f(X \setminus U) \subset \{1\}$. Поскольку X счётно, существует $a \in (0,1) \setminus f(X)$. Очевидно, $f^{-1}([0,a)) = f^{-1}([0,a])$ — открыто-замкнутая окрестность x, содержащаяся в U. Значит, X нульмерно. Осталось применить теорему 10. ∎

Мы уже построили пример вполне несвязного не нульмерного тихоновского и даже сепарабельного метризуемого пространства. Существуют и примеры метризуемых (хотя, разумеется, не линделёфовых и потому не сепарабельных) нульмерных не сильно нульмерных пространств. Однако для компактов все три свойства совпадают.

Т.11 Для компакта X следующие условия равносильны:
① X вполне несвязен;
② квазикомпонента любой точки $x \in X$ есть $\{x\}$;
③ X нульмерен;
④ X сильно нульмерен.

□ ①⇒② — это теорема 8.
②⇒③: взяв все открыто-замкнутые множества в качестве базы новой топологии X, мы получим хаусдорфову топологию $\mathcal{T}'$ на X, более слабую, чем исходная топология $\mathcal{T}$. Тождественное отображение $(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ взаимно однозначно и непрерывно. Поскольку X — компакт, это гомеоморфизм, т.е. $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.
■ ③⇒④ вытекает из теоремы 10 (и того, что всякий компакт регулярен).

<u>Сохранение несвязности разных видов операциями над пространствами</u>

<u>Подпространства</u>: Очевидно, любое подпространство вполне несвязного пространства вполне несвязно и любое непустое подпространство нульмерного пространства нульмерно. Кроме того, из определения сильной нульмерности вытекает, что если X сильно нульмерно, $Y \subset X$, $Y \neq \varnothing$ и любая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$, то Y сильно нульмерно. В частности, в нормальных пространствах сильная нульмерность наследуется непустыми замкнутыми подпространствами. Однако для ненормальных пространств это не так: существуют примеры сильно нульмерных пространств, которые содержат не сильно нульмерные непустые замкнутые (и даже нормальные) подпространства.

Т.12 Тихоновское пространство X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда βX сильно нульмерно.

□ Поскольку любая непрерывная функция $X \to [0,1]$ продолжается на βX, достаточно доказать, что если X сильно нульмерно, то βX сильно нульмерно, т.е. удовлетворяет условию ② в теореме 9. Пусть $A, B \subset \beta X$ и $f: \beta X \to [0,1]$ — непрерывная функция, для ко-

Не надо

торой $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$. Множества $A_1 = X \cap f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ и $B_1 = X \cap f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ функционально отделены в X (очевидно); пусть $U \subset X$ открыто-замкнуто, $A_1 \subset U$, $B_1 \subset X \setminus U$. Положим $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ 1, & x \notin U. \end{cases}$ Функция g непрерывна на X; пусть $\bar{g}$ — её продолжение на βX. Поскольку $X = \beta X$ и $g(X) \subset \{0, 1\}$, имеем $\bar{g}(\beta X) \subset \{0, 1\}$. Ясно, что $\bar{g}^{-1}(\{0\})$ — открыто-замкнутое множество в βX и $\bar{g}^{-1}(\{0\}) \supset \bar{A}_1 \supset A$. Ясно также, что $B \subset \bar{B}_1 \subset \bar{g}^{-1}(\{1\})$, откуда $B \subset \beta X \setminus \bar{g}^{-1}(\{0\})$. ▨

С другой стороны, всякое нульмерное пространство имеет нульмерную (а значит, и сильно нульмерную) компактификацию.

Т.13 Каждое нульмерное пространство веса κ можно вложить в $\{0,1\}^\kappa$.

□ Пусть X нульмерно, $w(X) = \kappa$. Из любой базы X можно выделить базу мощности κ (доказывалось в самом начале). Пусть $\mathcal{B}$ — база X, состоящая из открыто-замкнутых множеств, $|\mathcal{B}| = \kappa$. Для $U \in \mathcal{B}$ положим $f_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin U. \\ 1, & \text{если } x \in U \end{cases}$. Семейство $\{f_U : U \in \mathcal{B}\}$ непрерывных отображений $X \to \{0,1\}$ разделяет точки и замкнутые множества (потому что $\mathcal{B}$ — база); значит, $\underset{U \in \mathcal{B}}{\Delta} f_U : X \to \{0,1\}^\kappa$ — вложение. ▨

Из определения тихоновской топологии произведения вытекает нульмерность $\{0,1\}^\kappa$, а из теоремы Тихонова — его компактность. Ясно, что замыкание $X \subset \{0,1\}^\kappa$ в $\{0,1\}^\kappa$ — нульмерная компактификация пространства X.

<u>Произведения</u>: из теоремы 6, определения тихоновской топологии произведения, того, что все сомножители есть (замкнутые) подпространства произведения и наследственности вполне несвязности и нульмерности вытекает теорема:

Т.14 Произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, где $A \neq \varnothing$ и $X_\alpha \neq \varnothing$ для $\alpha \in A$, вполне несвязно (нульмерно) тогда и только тогда, когда все X_α вполне несвязны (нульмерны).

<u>Суммы</u>: Очевидно, сумма $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$, где $A \neq \varnothing$ и $X_\alpha \neq \varnothing$ для $\alpha \in A$, вполне несвязна (нульмерна, сильно нульмерна) тогда и только тогда, когда все X_α таковы.

<u>Отображения</u>: можно доказать, что всякое топологическое пространство есть непрерывный образ наследственно паракомпактного наследственно сильно нульмерного пространства при открытом отображении (т.е. при непрерывном отображении, переводящем открытые множества в открытые) — эту теорему доказал Исбелл в 1969 г. Значит, ни один из рассмотренных видов несвязности не сохраняются открытыми (тем более, факторными и просто непрерывными) отображениями. Зато, как легко видеть, обе нульмерности сохраняются непрерывными отображениями, переводящими открыто-замкнутые множества в открыто-замкнутые.