Надо

Суммы, факторпространства и пределы

Суммы

Опр. Пусть задано семейство $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ попарно непересекающихся топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ и семейство $\mathcal{T}$ всех множеств $U \subset X$ таких, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$. Легко видеть, что $\mathcal{T}$ — топология на X. Множество X с этой топологией называется <u>суммой пространств</u> X_α, $\alpha \in A$, и обозначается $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. В случае, когда A конечно (т.е. $A = \{1, \dots, n\}$), используется также обозначение $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$.

Зам. Множество $F \subset X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда каждое пересечение $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α.

Зам. Очевидно, каждое слагаемое X_α одновременно открыто и замкнуто в $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Зам. Если $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$, то топология на $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$, индуцированная из $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$, совпадает с топологией суммы $\bigoplus_{\alpha \in A} Y_\alpha$.

Предл. 1 (Очевидно из опред-я непрерывн.) Отображение $f : \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{X_\alpha}$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

Предл. 2 Если топологическое пространство X может быть представлено как объединение своих попарно непересекающихся открытых подмножеств X_α, $\alpha \in A$, то $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

□ Поскольку $X = \bigcup X_\alpha = \bigoplus X_\alpha$ совпадают как множества, достаточно проверить, что если U открыто в X, то $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α $\forall \alpha \in A$ и если $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α $\forall \alpha \in A$, то U открыто в X. Первое вытекает из определения топологии подпространства на X_α, а второе — из открытости всех U_α. ■

Предл. 3
1) Для $i \le 4$ $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha \in T_i$ тогда и только тогда, когда $X_\alpha \in T_i$ $\forall \alpha \in A$.
2) $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ локально компактно (паракомпактно) тогда и только тогда, когда X_α локально компактно (паракомпактно) $\forall \alpha \in A$.
3) $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактно (счётно компактно, псевдокомпактно, секвенциально компактно) $\Leftrightarrow$ X_α обладает тем же свойством $\forall \alpha \in A$ и A конечно.
4) $w(\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha) = \max\{\sup_{\alpha \in A} w(X_\alpha), |A|\}$; то же верно для d, c и l.
5) $\chi(\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha) = \sup_{\alpha \in A} \chi(X_\alpha)$.

□ Непосредственно из определений. ■

Надо

Примеры: ① Дискретное пространство является суммой одноточечных пространств.

② Для любого множества непересекающихся полуоткрытых интервалов $X_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha)$, где $\bigcup X_\alpha = [0,1)$, стрелка Зоренфрея может быть представлена как $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$.

③ Вещественную прямую $\mathbb{R}$ нельзя представить как сумму $X \oplus Y$ непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}$. Действительно, пусть $X \oplus Y = \mathbb{R}$. Выберем точки $x \in X$ и $y \in Y$. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$. Положим $z = \sup(X \cap [x, y])$. Поскольку X замкнуто, имеем $z \in X$; значит, $z < y$. Поскольку X открыто, $\exists \varepsilon > 0$ т., что $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subset X$ вопреки определению точной верхней грани.

Факторпространства

Пусть X — топологическое пространство и $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве X. В поисках хорошей топологии на множестве $X/\sim$ классов эквивалентности естественно объявить открытыми те множества $U \subset X/\sim$, для которых множество $\{x \in X : [x] \in U\}$, т.е. объединение принадлежащих U классов эквивалентности как подмножеств X, открыто. Такие множества $U \subset X/\sim$ действительно образуют топологию на $X/\sim$; она называется факторгопологией, а множество $X/\sim$, снабжённое этой топологией, называется факторпространством. Отображение $q: X \to X/\sim$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие её класс эквивалентности $[x] \in X/\sim$, называется естественным факторным отображением. Легко видеть, что оно непрерывно.

Заметим, что всякое отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ топологических пространств определяет отношение эквивалентности $\sim_f$ на X: $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. При этом образы точек $f(x)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с их полными прообразами $f^{-1}(x)$, так что множество Y можно интерпретировать как множество классов эквивалентности $\sim_f$. Тем не менее далеко не все непрерывные образы топологических пространств являются их факторпространствами, и далеко не все непрерывные сюръекции являются факторными отображениями.

В дальнейшем мы будем отождествлять образ Y множества X при сюръективном отображении $f: X \to Y$ и множество $X/\sim_f$ классов эквивалентности $\sim_f$ (как множества).

Нужны предл., опр., след. 5, след. 6

Предл. Для отображения $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ топологических пространств следующие условия равносильны:
1) f факторно (и $Y = X/\sim_f$ — факторпространство);
2) $U \subset Y$ открыто в Y $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ открыто в X;
3) $F \subset Y$ замкнуто в Y $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ замкнуто в X.

□ Достаточно заметить, что $\{x : [x] \in U \subset Y = X/\sim_f\} = f^{-1}(U)$ и что $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$. ■

След. 1 Любое факторное отображение непрерывно.

След. 2 Композиция двух факторных отображений факторна.

След. 3 Если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений факторна, то отображение g факторно.

□ Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Очевидно, g сюръективно. Если $U \subset Z$ открыто, то $g^{-1}(U)$ открыто в Y по непрерывности g. Если $U \subset Z$ таково, что $g^{-1}(U)$ открыто в Y, то $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X (так как f непрерывно); значит, U открыто в Z (так как $g \circ f$ факторно). ■

Зам. Отображение f в следствии 3 может не быть факторным, даже если оно сюръективно (пример — одноточечное Z и любое непрерывное отображение $f: X \to Y$).

След. 4 Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение и существует множество $A \subset X$ такое, что $f(A) = Y$ и $f|_A$ — факторное отображение, то f факторно.

□ Пусть $i_A: A \to X$ — тождественное вложение. Имеем $f|_A = f \circ i_A$. Осталось применить следствие 3. ■

Опр. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ <u>открыто</u> (<u>замкнуто</u>), если $f(A)$ открыто (замкнуто) в Y для любого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$.

След. 5 Если $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — открытое или замкнутое отображение, то f факторно. В частности, непрерывная сюръекция компакта X на $Y \in T_2$ факторна.

След. 6 Любое взаимно однозначное факторное отображение является гомеоморфизмом.

Нужно всё, кроме леммы

Зам. Легко видеть, что факторпространство пространства X по некоторому отношению эквивалентности (или, что то же самое, образ X при некотором факторном отображении) удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 тогда и только тогда, когда все классы эквивалентности (прообразы точек) замкнуты в X.

Зам. Вообще говоря, сужение факторного отображения не является факторным отображением на образ; однако если $f: X \to Y$ факторно и $Z \subset Y$ открыто или замкнуто, то $f|_{f^{-1}(Z)}: f^{-1}(Z) \to Z$ факторно.

Примеры ① Стягивание множества в точку. Пусть X — пространство и $F \subset X$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, классами которой являются множества F и $\{x\}$, $x \in X \setminus F$. Факторпространство $Y = X/\sim$ обозначается X/F; говорят, что Y получается стягиванием в точку множества F. Ясно, что $Y \in T_1$, если и только если F и все $\{x\}$, $x \in X \setminus F$, замкнуты. Если X регулярно и F замкнуто, то Y хаусдорфово. Для того, чтобы Y было вполне регулярным, нужно, чтобы X было вполне регулярным, (F было замкнутым) и для любого замкнутого множества $G \subset X$, $G \cap F = \varnothing$, существовала непрерывная функция $f: X \to [0,1]$ такая, что $f|_F \equiv 0$ и $f|_G \equiv 1$. Однако если X нормально и F замкнуто, то Y тоже нормально. Действительно, легко видеть, что из замкнутости F и всех $\{x\}$, $x \in X \setminus F$, вытекает замкнутость естественного факторного отображения $X \to X/\sim = Y$. Осталось применить следующую лемму.

Лемма Если $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — замкнутое отображение нормального пространства X на некоторое пространство Y, то Y нормально.

□ Ясно, что $Y \in T_1$. Пусть $F, G \subset Y$ — замкнутые множества и $F \cap G = \varnothing$; тогда множества $f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(G)$ замкнуты в X и $f^{-1}(F) \cap f^{-1}(G) = \varnothing$. В силу нормальности X существуют открытые $U, V \subset X$ такие, что $f^{-1}(F) \subset U$, $f^{-1}(G) \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Множества $X \setminus U$ и $X \setminus V$ замкнуты и покрывают X. Значит, $f(X \setminus U)$ и $f(X \setminus V)$ замкнуты в Y и покрывают Y. Положим $W = Y \setminus f(X \setminus U)$ и $O = Y \setminus f(X \setminus V)$. Имеем $W \cap O = \varnothing$. Поскольку $f^{-1}(F) \subset U$ и $f^{-1}(G) \subset V$, имеем $F \subset W$ и $G \subset O$. ▨

Надо

Веер Фреше–Урысона (пример счётного пространства Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности) как раз является факторпространством суммы счётного числа дизъюнктных копий сходящейся последовательности, полученным стягиванием в точку замкнутого множества, образованного всеми пределами этих последовательностей. Метрический ёж получается (как множество) при отождествлении левых концов счётного числа копий отрезка $[0,1]$, но он не является факторпространством суммы отрезков — его топология строго слабее фактортопологии.

② Присоединение пространства по отображению. Пусть X и Y — два непересекающихся топологических пространства и $f: F \to Y$ — непрерывное отображение, определённое на замкнутом множестве $F \subset X$. Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на сумме $X \oplus Y$, соответствующее разбиению пространства $X \oplus Y$ на одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X \setminus F$ и $\{y\}$, $y \in Y \setminus f(F)$, и множества вида $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, $y \in f(F)$. Факторпространство $(X \oplus Y)/\sim$ обозначается $X \cup_f Y$. Легко видеть, что если Y — одноточечное пространство, то $X \cup_f Y$ гомеоморфно факторпространству X/F. Нетрудно проверить, что для любого Y отображения $\varphi: X \setminus F \to X \cup_f Y$ и $\psi: Y \to X \cup_f Y$, где $\varphi = q \circ i_X$ и $\psi = q \circ i_Y$ (здесь q — естественное факторное отображение $X \oplus Y \to X \cup_f Y$, $i_X: X \to X \oplus Y$ и $i_Y: Y \to X \oplus Y$ — тождественные вложения) являются гомеоморфными вложениями, причём $\varphi(X \setminus F)$ открыто в $X \cup_f Y$ и $\psi(Y)$ замкнуто в $X \cup_f Y$.

③ Приклеивание и склеивание. Операцию присоединения пространства по гомеоморфизму часто называют приклеиванием*). В случае, когда в одном и том же топологическом пространстве X имеются два непересекающихся подпространства F_1 и F_2, связанных гомеоморфизмом $f: F_1 \to F_2$, определена также операция склеивания подпространств F_1 и F_2 — факторизация по отношению эквивалентности, порождённому разбиением на одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X \setminus (F_1 \cup F_2)$, и двухточечные множества $\{x, f(x)\}$, $x \in F_1$. Для того чтобы получившееся факторпространство было хаусдорфовым, нужно требовать замкнутости множеств F_1 и F_2.

*) Иногда приклеиванием называют и присоединение по любому отображению.

Не надо

Операции склеивания и приклеивания особенно популярны в теории двумерных поверхностей. Так, лист Мёбиуса — это квадрат, две противоположные стороны которого склеены в противоположном направлении, проективная плоскость — это диск, к которому по границе приклеен лист Мёбиуса (или, что то же самое, диск, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки), а любая связная поверхность, гомеоморфная объединению конечного числа криволинейных треугольников, причём любые два треугольника в этом объединении либо не пересекаются, либо имеют общую сторону или вершину, и любая точка поверхности имеет окрестность, гомеоморфную плоскости (такие поверхности называются связными компактными триангулируемыми поверхностями без края), — так вот, всякая такая поверхность гомеоморфна сфере, из которой удалили ("вырезали") некоторое конечное число открытых дисков, а затем по границе каждого удалённого диска приклеили либо лист Мёбиуса (по его границе) либо ручку, т.е. тор, из которого тоже вырезали диск (по границе этого диска). Более того, для каждой конкретной поверхности можно обойтись либо только листами Мёбиуса, либо только ручками

Прямые и обратные пределы

Суммы топологических пространств очень удобны — все их топологические свойства сразу усматриваются из свойств слагаемых. Кроме того, отображение суммы непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его сужения на слагаемые. Разумеется, в общем случае, когда пространство является просто объединением, а не прямой суммой, своих подпространств, это не так. Однако бывают ситуации, когда $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, причём X_α не дизъюнктны и не открыты, но, тем не менее, множество $U\subset X$ открыто тогда и только тогда, когда каждое пересечение $U\cap X_\alpha$ открыто в X_α (и, следовательно отображение, определённое на X, непрерывно тогда и только тогда, когда все сужения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны). Например, таковы k-пространства — хаусдорфовы факторпространства локально компактных хаусдорфовых пространств. Можно показать, что множество открыто (замкнуто) в k-пространстве тогда и только тогда,

Не надо

когда все его пересечения с компактными подпространствами этого пространства открыты (замкнуты) в этих подпространствах.

Другой пример даёт конструкция прямого предела прямого спектра топологических пространств (которая покрывает и конструкцию суммы). Пусть $(A,\le)$ — направленное множество. Предположим, что определено семейство $\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ топологических пространств и для любых $\alpha,\beta\in A$, $\alpha\le\beta$, определено непрерывное отображение $f_{\alpha\beta}: X_\alpha\to X_\beta$ со свойствами:

- $f_{\alpha\alpha} = id_{X_\alpha}: X_\alpha\to X_\alpha$ — тождественное отображение;
- $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma}\circ f_{\alpha\beta}$ для любых $\alpha\le\beta\le\gamma$.

Тогда семейство $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta} : \alpha,\beta\in A, \alpha\le\beta\}$ называется прямым спектром над A. Прямым, или индуктивным, пределом этого спектра называется факторпространство $\varinjlim X_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha/\sim$, где $x_\alpha\in X_\alpha$ и $x_\beta\in X_\beta$ эквивалентны ($x_\alpha\sim x_\beta$), если $\exists\gamma\in A$, для которого $f_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = f_{\beta\gamma}(x_\beta)$.*) Чаще всего встречается простейшая ситуация, когда направление согласовано с отношением включения (т.е. $\alpha\le\beta \iff X_\alpha\subset X_\beta$) и отображения $f_{\alpha\beta}$ — гомеоморфные вложения. В этом случае $\varinjlim X_\alpha = \bigcup X_\alpha$ и $U\subset \varinjlim X_\alpha$ открыто тогда и только тогда, когда $U\cap X_\alpha$ открыто в X_α $\forall\alpha\in A$. Если $A=\mathbb{N}$ (с обычным порядком), то говорят о прямом пределе (прямой) последовательности пространств.

Бывают и обратные пределы. В этом случае вместо отображений $f_{\alpha\beta}: X_\alpha\to X_\beta$ для $\alpha\le\beta$ заданы непрерывные отображения $\pi^\alpha_\beta: X_\alpha\to X_\beta$ для $\alpha\ge\beta$, причём $\pi^\alpha_\alpha = id_{X_\alpha}$ и $\pi^\beta_\gamma\circ\pi^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\gamma$ для $\alpha\ge\beta\ge\gamma$. Отображения π^α_β называются проекциями, а семейство $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha,\beta\in A, \alpha\ge\beta\}$ — обратным спектром над A. Обратный спектр с $A=\mathbb{N}$ называется обратной последовательностью. Обратным, или проективным, пределом обратного спектра $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ называется подпространство произведения

$$\varprojlim X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : \pi^\beta_\gamma(x_\beta) = x_\gamma \ \forall\beta,\gamma\in A, \beta\ge\gamma\}\subset\prod_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

Предл. Предел обратного спектра $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta: \alpha,\beta\in A, \alpha\ge\beta\}$ хаусдорфовых пространств есть замкнутое подпространство $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$.

□ Для $\alpha\ge\beta$ положим $S_{\alpha\beta} = \{(x_\gamma)_{\gamma\in A}\in\prod_{\gamma\in A}X_\gamma : \pi^\alpha_\beta(x_\alpha) = x_\beta\}$.

*) Иными словами, $\varinjlim X_\alpha$ снабжается сильнейшей топологией среди всех, относительно которых все отображения $f_{\alpha\beta}$ непрерывны.

Не надо

Очевидно, каждое $S_{\alpha\beta}$ замкнуто в $\prod_{\gamma\in A} X_\gamma$ (оно состоит из точек совпадения непрерывных отображений $\pi^\alpha_\beta \circ p_\alpha : \prod_{\gamma\in A} X_\gamma \to X_\beta$ и $p_\beta : \prod X_\gamma \to X_\beta$). Значит, предел $\varprojlim X_\alpha = \bigcap_{\alpha\geq\beta} S_{\alpha\beta}$ тоже замкнут. ▨

<u>Пример</u> Пусть X_α, $\alpha\in A$, — пространства и $|A| \geq \aleph_0$. Семейство $\mathcal{F}$ всех конечных подмножеств A направлено отношением $\subset$. Для каждого $F\in\mathcal{F}$ положим $X_F = \prod_{\alpha\in F} X_\alpha$. Для $F, G\in\mathcal{F}$ таких, что $F\supset G$, определено отображение $\pi^F_G : X_F \to X_G$ сужения элементов X_F (которые, напомним, суть отображения $F \to \bigcup_{\alpha\in F} X_\alpha$) на G, причём π^F_G непрерывно. Получили обратный спектр $\{X_F, \pi^F_G : F, G\in\mathcal{F}, F\supset G\}$. Для каждого $\alpha\in A$ положим $F_\alpha = \{\alpha\}\in\mathcal{F}$. Легко видеть, что отображение $\varprojlim\{X_F, \pi^F_G : F\supset G\in\mathcal{F}\} \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, определённое правилом $(x_F)_{F\in\mathcal{F}} \mapsto (x_{F_\alpha})_{\alpha\in A} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, — гомеоморфизм. Следовательно, применяя операцию обратного спектра, можно выражать бесконечные произведения в терминах конечных.

<u>Пример</u> Пусть $\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ — семейство подпространств пространства X, направленное отношением, обратным включению, т.е. такое, что $\forall \alpha,\beta\in A$ $\alpha\leq\beta \Leftrightarrow X_\alpha\supset X_\beta$ и $\exists\gamma\in A: X_\gamma\subset X_\alpha\cap X_\beta$. Пусть $\pi^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ — вложение X_α в X_β для $\alpha\geq\beta$. Понятно, что $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha,\beta\in A, \alpha\geq\beta\}$ — обратный спектр и $\varprojlim X_\alpha$ гомеоморфен $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \subset X$. В частности, любое подпространство Y T_1-пространства X можно представить как предел обратного спектра открытых подпространств X — дополнений до конечных множеств, не пересекающих Y.