Нужно

Линделёфовы пространства

Опр. Топологическое пространство с тем свойством, что из каждого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие, называется <u>финально компактным</u>. Регулярное финально компактное пространство называется <u>линделёфовым</u>.

В связи с этим определением естественно ввести ещё одну кардинальнозначную характеристику топологического пространства вдобавок к уже известным нам весу, характеру, плотности и числу Суслина (а при изучении локально компактных пространств нам встретился ещё и псевдохарактер); такие характеристики называются <u>кардинальными инвариантами</u>.

Опр. Пусть X — топологическое пространство. Кардинал
$$\ell(X) = \min\{\kappa : \text{любое открытое покрытие } X \text{ содержит подпокрытие мощности } \kappa\}$$
называется <u>числом Линделёфа</u> пространства X.

Следующие свойства очевидны и аналогичны соответствующим свойствам компактных пространств:

- Пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда каждое счётно центрированное*) семейство замкнутых множеств в нём имеет непустое пересечение.
- Финальная компактность сохраняется непрерывными отображениями.
- Финальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.

Заметим также, что всякое пространство со счётной базой, очевидно, финально компактно.

Линделёфовость (тем более финальная компактность) не конечно мультипликативна. Пример — всё та же стрелка Зоргенфрея:**) её квадрат содержит несчётное замкнутое дискретное подпространство, которое, понятно, не линделёфово. Однако произведение линделёфова пространства и компакта линделёфово — это доказывается примерно так же, как аналогичное утверждение для паракомпактов. (Линделёфовость здесь можно заменить на финальную компактность.)

*) Это значит, что каждое счётное подсемейство имеет непустое пересечение.

**) Её линделёфовость обсуждается чуть дальше.

Последняя теорема не нужна, но полезна (хотя бы для задач)

Т. Каждое линделёфово пространство паракомпактно.

□ Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие линделёфова пространства X. Поскольку X регулярно, для каждой точки $x \in X$ найдутся открытые множества $U_x, V_x \subset X$ такие, что $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x$ и V_x содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$. Пусть $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — счётное подпокрытие покрытия $\{U_x : x \in X\}$. Множества

$$W_i = V_{x_i} \setminus (\overline{U_{x_1}} \cup \ldots \cup \overline{U_{x_{i-1}}}), \text{ где } i = 1, 2, \ldots,$$

открыты и покрывают X: каждая точка $x \in X$ содержится в $W_{i(x)}$, где $i(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in V_{x_n}\}$. Покрытие $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ вписано в $\mathcal{U}$ и локально конечно, так как всякая точка $x \in X$ содержится в некотором U_{x_j}, а
■ $U_{x_j} \cap W_i = \varnothing$ для $i > j$.

Пример. Из этой теоремы видно, почему стрелка Зоргенфрея служит примером паракомпакта, квадрат которого не паракомпактен: она паракомпактна, будучи линделёфовой, а квадрат её даже не нормален. То, что стрелка линделёфова, вытекает из счётности её числа Суслина (которое, в свою очередь, следует из сепарабельности): Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любое открытое покрытие стрелки S, и пусть V_α — внутренность U_α по отношению к обычной топологии на $[0,1)$. Покажем, что множество $L = S \setminus \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ счётно. Для каждого $x \in L$ $\exists\, \alpha(x) \in A$ и вещественное число $r(x) > x$ такие, что $[x, r(x)) \subset U_{\alpha(x)}$. По определению L если $x \neq x'$, то $[x, r(x)) \cap [x', r(x')) = \varnothing$. Мощность семейства попарно непересекающихся полуоткрытых интервалов не может быть несчётной (каждый полуоткрытый интервал содержит рациональные числа).

Множество $S \setminus L$ с обычной топологией, индуцированной из прямой, обладает счётной базой, и $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие этого множества, открытое в обычной топологии. Значит, из него можно выделить счётное подпокрытие $\{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Семейство $\{U_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ покрывает всю стрелку, кроме какой-то части множества L, а на то, чтобы покрыть L, хватит счётного числа элементов покрытия (L счётно).

Т. В классе метризуемых пространств линделёфовость*) равносильна наличию счётной базы.

□ $\Rightarrow$ Для каждого n выделим счётное подпокрытие из покрытия шарами радиуса $1/n$. Все элементы всех этих подпокрытий составят (счётную) базу (чтобы это аккуратно доказать, нужно неравенство треугольника).
■ $\Leftarrow$ ясно.

*) Также как и сепарабельность и счётность числа Суслина.

Пример не нужен

Счётно компактные и псевдокомпактные пространства

У компактных пространств есть два замечательных свойства, которые имеет смысл рассматривать отдельно. Несмотря на внешнюю непохожесть эти свойства очень близки, поэтому мы рассмотрим их параллельно.

Опр. Топологическое пространство X называется *счётно компактным*, если из каждого счётного открытого покрытия этого пространства можно выбрать конечное подпокрытие.

Зам. Ясно, что счётная компактность + линделёфовость = компактность.

Зам. Ясно также, что счётная компактность наследуется замкнутыми множествами.

Опр. Тихоновское пространство X называется *псевдокомпактным*, если всякая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ ограничена.*)

Зам. Равенство псевдокомпактность + линделёфовость = компактность не столь очевидно, но оно верно, поскольку, как мы увидим, нормальные псевдокомпактные пространства счётно компактны.

Пример Псевдокомпактность не наследуется замкнутыми множествами:**)

Существуют псевдокомпактные пространства, в которых все счётные подмножества замкнуты и дискретны

Поскольку $\mathbb{R}$ нормально и $\mathbb{N}$ замкнуто в $\mathbb{R}$, имеем $\beta\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{R}$. Рассмотрим $X = \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Ясно, что X содержит дискретное пространство $\mathbb{N}$ в качестве замкнутого подпространства (все точки из его замыкание в $\beta\mathbb{R}$ удалены). Предположим, что $\exists$ неограниченная непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$. Поскольку $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} = X$, найдётся послед-ть $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, такая, что $|f(x_i)| > i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку f непрерывна, множество $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ не имеет предельных точек в X. Значит, A — замкнутое в $\mathbb{R}$ дискретное подпространство пространства X. Из нормальности $\mathbb{R}$ вытекает, что $\overline{A} \cap \overline{\mathbb{N}} = \overline{A} \cap \beta\mathbb{N} = \varnothing$ (см. свойства стоун-чеховской компактификации). Значит, $\overline{A} \subset X$, т.е. $\overline{A}$ — бесконечный дискретный компакт. Таких не бывает.

---

*) Функция считается ограниченной, если её модуль ограничен.

**) Это также пример псевдокомпактного не счётно компактного пространства — оно содержит бесконечное замкнутое дискретное множество $\mathbb{N}$.

Не всё нужно, но всё очень полезно

Т. Для произвольного пространства X следующие условия равносильны:
① X счётно компактно
② Пересечение каждого счётного центрированного семейства замкнутых в X множеств непусто
③ Любое локально конечное семейство непустых множеств в X конечно *)
④ Каждое бесконечное подмножество X имеет точку накопления

□ ①⇔② Стандартно.
②⇒③ Если существует локально конечное бесконечное семейство $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ непустых множеств в X, то замкнутые множества $F_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} \overline{A_j}$ (они замкнуты в силу консервативности любого локально конечного семейства) образуют убывающую и потому центрированную последовательность, причём $\bigcap F_n = \emptyset$.
③⇒④ Очевидно.
④⇒① Если $\{U_n : n=1,2,\dots\}$ — счётное покрытие, у которого нельзя выбрать конечное подпокрытие, то мы можем найти точки $x_n \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$. Каждая точка $x \in X$ содержится в некотором элементе покрытия $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, и этот элемент — её окрестность, пересекающаяся с множеством $\{x_1, x_2, \dots\}$ по конечному числу элементов. Значит, это множество не имеет точки накопления. ■

Т. Для произвольного тихоновского пространства X следующие условия равносильны:
① X псевдокомпактно
② Для каждого счётного центрированного семейства $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых множеств в X пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V_i}$ непусто
③ любое локально конечное семейство непустых открытых множеств в X конечно
④ Каждое локально конечное открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. *)

□ ①⇒③ Предположим, что $\exists$ бесконечное локально конечное семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ непустых открытых множеств в X. Выберем $x_i \in V_i$, $i=1,2,\dots$ X тихоновское, поэтому найдутся функции $f_i : X \to \mathbb{R}$ такие, что $f_i(x_i) = i$ и $f_i(X \setminus V_i) \subset \{0\}$ (все непрерывные). Так как $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ локально конечно, функция $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$ определена и непрерывна, и притом неограничена.

*) Следствие. Всякое счётно компактное или псевдокомпактное паракомпактное пространство компактно.

③ ⇒ ④ ясно.

④ ⇒ ① Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Ясно, что $\{f^{-1}((i-1, i+1)) : i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — локально конечное открытое покрытие X. Из ④ вытекает ограниченность f.

③ ⇒ ② Если $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — центрированная система открытых множеств, то найдётся точка $x \in X$, каждая окрестность которой пересекает бесконечно много множеств $V_n = \bigcap_{i \le n} W_i$, иначе бесконечная система $\{V_n\}$ непустых открытых множеств была бы локально конечной. Ясно, что $x \in \bigcap \overline{W_n}$.

② ⇒ ① Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $V_i = \{x : |f(x)| > i\}$, центрировано, но $\bigcap \overline{V_i} = \varnothing$. ■

Т. Каждое тихоновское счётно компактное пространство псевдокомпактно. Каждое нормальное псевдокомпактное пространство счётно компактно.

□ Первое утверждение вытекает из сравнения доказанных теорем (хотя его легко проверить и непосредственно). Докажем второе. Если X нормально и не счётно компактно, то в нём есть замкнутое дискретное (т.е. не имеющее предельных точек) бесконечное подпространство, любая непрерывная (т.е. вообще любая) функция с которого продолжается на X, а среди таких функций есть непрерывные. ■

Имеются (довольно сложные) примеры счётно компактных пространств X и Y, произведение которых $X \times Y$ не псевдокомпактно. Таким образом, ни счётная компактность, ни псевдокомпактность не конечно мультипликативна. Однако оба эти свойства выдерживают умножение на компакт — это доказывается стандартным путём (для псевдокомпактных пространств нужно применить доказанную выше теорему).

Т. В классе метризуемых пространств счётная компактность и псевдокомпактность равносильны компактности и влекут наличие счётной базы.

□ Пусть X — метризуемое пространство. X нормально, поэтому достаточно доказать теорему для счётной компактности. Итак, пусть X счётно компактно. Заметим, что $c(X) \le \aleph_0$, иначе найдётся несчётное семейство непустых открытых попарно непересекающихся множеств, а значит, и несчётное семейство попарно непересекающихся шаров радиуса $\ge \frac{1}{n}$ для некоторого n (относительно метрики, порождающей топологию X). Центры этих шаров образуют несчётное ($\Rightarrow$ бесконечное) замкнутое дискретное множество в противоречие со счётной компактностью. Итак, $c(X) \le \aleph_0$; значит, $w(X) \le \aleph_0$ и $l(X) \le \aleph_0$ (потому что X метризуемо), а компактность = линделёфовость + счётная компактность. ■

Можно также воспользоваться теоремой Стоуна о паракомпактности метризуемых пр-в и следствием в примечании на пред. странице

Не нужно

Секвенциально компактные пространства

Опр. Топологическое пространство X секвенциально компактно, если каждая последовательность точек X содержит сходящуюся подпоследовательность.

Очевидно, каждое секвенциально компактное пространство счётно компактно, но обратное неверно: $\beta\mathbb{N}$ — пример не секвенциально компактного компакта (в нём нет нетривиальных сходящихся последовательностей).

Т. Секвенциальная компактность и счётная компактность равносильны в классе пространств с первой аксиомой счётности.

$\square$ Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек счётно компактного пространства с первой аксиомой счётности. Если множество $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ конечно, то сходящаяся подпоследовательность выбирается легко. Будем предполагать, что $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ бесконечно. Пусть x — предельная точка этого множества. Рассмотрим счётную базу $U_1, U_2, \dots$ окрестностей x. В каждом пересечении $U_1\cap\dots\cap U_n$ выберем точку $x_{k_n}\in\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ так, чтобы выполнялось условие $k_n < k_m$ для $n<m$. Очевидно, подпоследовательность $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к x. $\blacksquare$

Непосредственно из определения вытекает, что
- секвенциальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами;
- секвенциальная компактность сохраняется непрерывными отображениями.

Т. Секвенциальная компактность счётно мультипликативна.

$\square$ Пусть X_n, $n=1,2,\dots$, — секвенциально компактные пространства и $z_1, z_2, \dots$, где $z_i = (x_n^i)_{n=1}^{\infty}$, — последовательность точек произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Последовательность $x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots$ точек пространства X_1 содержит сходящуюся подпоследовательность $x_1^{k_{1,1}}, x_1^{k_{2,1}}, x_1^{k_{3,1}}, \dots$ (поскольку X_1 секвенциально компактно); пусть x_1 — предел этой последовательности. Точно так же, последовательность $x_2^{k_{1,1}}, x_2^{k_{2,1}}, x_2^{k_{3,1}}, \dots$ точек пространства X_2 содержит сходящуюся подпоследовательность $x_2^{k_{1,2}}, x_2^{k_{2,2}}, x_2^{k_{3,2}}, \dots$; пусть x_2 — предел этой последовательности. … Последовательность $x_n^{k_{1,n-1}}, x_n^{k_{2,n-1}}, \dots$

Не нужно

точек пространства X_n содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть x_n — её предел. Заметим, что если опустить первые $n-1$ членов последовательности чисел $k_{1,1}, k_{2,2}, k_{3,3}, \dots$, то получится подпоследовательность последовательности $k_{1,n}, k_{2,n}, k_{3,n}, \dots$. Значит, каждая последовательность $(x_i^{k_{n,n}})_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_i, и несложно показать, что точка $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ является пределом подпоследовательности $z_{k_{1,1}}, z_{k_{2,2}}, z_{k_{3,3}}, \dots$ последовательности $z_1, z_2, \dots$ в $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. $\blacksquare$

Очень полезный пример

Пример: пространство счётных ординалов

Классический пример счётно компактного некомпактного пространства — это пространство $W_1^\circ = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ всех счётных ординалов с топологией порядка. Это пространство не компактно, потому что оно является незамкнутым подпространством в $W_1 = \{\alpha : \alpha \le \omega_1\}$. Однако любое счётное подмножество W_1° содержится в $\{\alpha : \alpha \le \beta_0\}$ для некоторого $\beta_0 \in \omega_1$, а это множество замкнуто в W_1. Из того, что, как мы сейчас покажем, W_1 — компакт, следует, что любое счётное множество в W_1° имеет предельную точку (= точку накопления для T_1-пространств), т.е. W_1° счётно компактно.

Итак, пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие W_1 и $X = \{x \in W_1 : [0, x]$ содержится в объединении конечного числа множеств $U_\alpha\}$. (Здесь $[0, x] = \{\alpha : 0 \le \alpha \le x\}$.) Нам надо показать, что $W_1 \setminus X = \emptyset$, т.е. $\omega_1 \in X$.

Пусть $W_1 \setminus X \ne \emptyset$ и $x_0 = \min(W_1 \setminus X)$ (напомним, что W_1 вполне упорядочено, так что в $W_1 \setminus X$ есть наименьший элемент). Найдём $\alpha_0 \in A$, для которого $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Понятно, что $0 < x_0$. Значит, $\exists\, y \in [0, x_0)$, для которого $(y, x_0] \subset U_{\alpha_0}$ (возможно, $(y, x_0] = \{x_0\}$). По определению x_0 имеем $y \in X$. Значит, $[0, y] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$. Видим, что $[0, x_0] \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_{\alpha_i}$ — противоречие. Итак, W_1 — компакт.

Пространство W_1° нормально. Это следует из того, что если A и B — замкнутые множества в W_1° и $A \cap B = \emptyset$, то либо A, либо B ограничено, т.е. либо $\exists\, \alpha_0 < \omega_1$ такое, что $A \subset [0, \alpha_0]$, либо $\exists\, \beta_0 < \omega_1$ такое, что $B \subset [0, \beta_0]$. Действительно, если A и B неограничены, то можно определить две последовательности $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ и $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$ счётных ординалов так, что $\alpha_i \in A$, $\beta_i \in B$ и $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\sup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \beta_i = \gamma < \omega_1$. Любая окрестность точки γ в W_1° содержит интервал вида (γ_1, γ_2) для некоторых $\gamma_1 < \gamma$ и $\gamma_2 > \gamma$. Любой такой интервал содержит как точки вида α_i, так и точки вида β_i; значит, он пересекает и A, и B, т.е. γ является предельной точкой для A и для B, а это противоречит замкнутости A и B и предположению $A \cap B = \emptyset$. Итак, A или B ограничено; будем считать для определённости, что $A \subset [0, \alpha_0]$, где $\alpha_0 < \omega_1$. Множество $[0, \alpha_0]$ замкнуто в компакте W_1 и потому само компактно. Значит, непересекающиеся замкнутые множества A и $B \cap [0, \alpha_0]$ имеют в нём непересекающиеся открытые окрестности U и V. Эти окрестности открыты также и в W_1°, потому что $[0, \alpha_0] = [0, \alpha_0 + 1)$ открыто в W_1°. Полагая $V' = V \cup (\alpha_0, \omega_1)$, видим, что U и V' — непересекающиеся открытые окрестности множеств A и B соответственно.

Любая непрерывная функция $f\colon W_1^0 \to \mathbb{R}$ постоянна с некоторого момента, т.е. $\exists\, \alpha_0 < \omega_1$ такой, что $f(\alpha) = f(\alpha_0)$ $\forall \alpha > \alpha_0$. Достаточно показать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, \alpha_n \in W_1^0$ такое, что $|f(\alpha) - f(\alpha_n)| < \frac{1}{n}$ $\forall \alpha > \alpha_n$. (Тогда можно будет положить α_0 равным любому ординалу, большему чем все α_n.) Итак, предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\alpha < \omega_1$ можно найти $\beta > \alpha$ такое, что $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq \frac{1}{n}$. Тогда мы можем определить две последовательности $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ и $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$ счётных ординалов так, что $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$ и $|f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \geq n$ для $i = 1, 2, \dots$. Пусть $\gamma = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \beta_i$. Тогда любая окрестность ординала γ содержит элементы обеих последовательностей, тогда как прообраз $f^{-1}\left(\left(f(\gamma) - \frac{1}{2n}, f(\gamma) + \frac{1}{2n}\right)\right)$ открытой окрестности $\left(f(\gamma) - \frac{1}{2n}, f(\gamma) + \frac{1}{2n}\right)$ точки $f(\gamma) \in \mathbb{R}$ содержит самое большее одну из точек α_i и β_i для $i = 1, 2, \dots$. Это противоречит непрерывности функции f в точке γ.

Из сказанного вытекает, в частности, что каждая непрерывная функция $f\colon W_1^0 \to [0,1]$ продолжается на компакт W_1. Значит, *$W_1 = \beta W_1^0$*. Следовательно, W_1^0 *локально компактно* (впрочем, это легко проверить и непосредственно).

Пусть W_0 — одноточечная компактификация счётного дискретного пространства ω, иными словами, множество ординалов $\{\alpha : \alpha \leq \omega\}$ с порядковой топологией. Пространство $W_1 \times W_0$ (его называют *плоскостью Тихонова**)) компактно, тем более, нормально, однако его подпространство $X = (W_1 \times W_0) \setminus \{\omega_1, \omega\}$ *не нормально*. Действительно, положим $A = \{(\omega_1, n) : n < \omega\}$ и $B = \{(\alpha, \omega) : \alpha < \omega_1\}$. Пусть U — любая окрестность A и V — любая окрестность B. Для каждого $n < \omega$ выберем $\alpha_n < \omega_1$ такое, что $(\alpha, n) \in U$ $\forall \alpha > \alpha_n$. Это возможно, потому что U содержит окрестность точки $(\omega_1, n) \in A$ для каждого $n < \omega$. Положим $\alpha_0 = \sup\limits_{n < \omega} \alpha_n$. Имеем $(\alpha_0, n) \in U$ $\forall n < \omega$. С другой стороны, любая окрестность точки $(\alpha_0, \omega) \in B$, в частности, V, содержит (α_0, n) для всех достаточно больших n. Значит, $U \cap V \neq \emptyset$.

Очевидно, W_1^0 удовлетворяет первой аксиоме счётности и счётно компактно, поэтому это пример *секвенциально компактного некомпактного* пространства. (Ясно, что компакт W_1 тоже секвенциально компактен, хотя первой аксиоме счётности он не удовлетворяет.)

Пространство W_1^0 счётно компактно, но не компактно, значит, и *не паракомпактно*.

*) Иногда плоскостью Тихонова называют $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$.