Обобщения компактности

Компактные пространства обладают столь замечательными свойствами, что уже сами эти свойства, хоть и не эквивалентны компактности, весьма интересны и полезны (достаточно упомянуть ограниченность всех непрерывных функций и сходимость последовательностей). П.С. Александров даже предложил выделить в особый класс топологические свойства типа компактности; так он называл свойства, которые формулируются в терминах двух семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ покрытий топологического пространства и состоят в том, что в каждое покрытие семейства $\mathcal{U}$ можно вписать*) покрытие семейства $\mathcal{V}$. Определения почти всех рассмотренных ниже свойств, обобщающих компактность (точнее, всех, кроме секвенциальной компактности) можно переформулировать так, что получится определение свойства типа компактности в этом смысле.

Начнём со свойства локальной компактности, которое нам уже встречалось.

Локально компактные пространства

Напомним, что топологическое пространство локально компактно, если каждая его точка имеет окрестность с компактным замыканием. (Вообще, любое топологическое свойство имеет локальную версию — надо требовать выполнение этого свойства для некоторой окрестности (в широком смысле, не обязательно открытой) каждой точки. Другое дело, что иногда такая "локализация" не имеет смысла или совпадает с самим свойством.)

Мы уже видели, что всякое локально компактное хаусдорфово пространство можно превратить в компакт добавлением одной точки; иными словами, всякое локально компактное пространство имеет одноточечную компактификацию. Отсюда вытекают такие утверждения — свойства локально компактных пространств.

*) Ясно, что в определении компактности "содержит конечное (открытое) подпокрытие" можно заменить на "можно вписать конечное открытое покрытие"

Нужны ① – ③
④, ⑤ полезны

① Всякое хаусдорфово локально компактное пространство вполне регулярно.
(Действительно, оно ведь вкладывается в компакт.)

Очевидно, локальная компактность наследуется открытыми подпространствами; получаем такое следствие:

② Локально компактные хаусдорфовы пространства — это в точности открытые подпространства компактов.

③ Если $X \in T_2$, $Y \subset X$ локально компактно и $\overline{Y} = X$, то Y открыто в X.

□ Каждая точка $x \in Y$ имеет открытую окрестность U в Y такую, что $\overline{U} \cap Y$ компактно и потому замкнуто в X. Поскольку $U = \overline{U} \cap Y$, имеем $U \subset \overline{U} \cap Y \subset Y$. Пусть V — открытое в X множество, для которого $V \cap Y = U$.
■ Тогда $x \in V \subset \overline{V} = \overline{Y \cap V} = \overline{U} \subset Y$.

Поскольку локальная компактность, очевидно, наследуется замкнутыми множествами, получаем такое утверждение относительно наследственности лок. комп-сти:

④ Подпространство локально компактного хаусдорфова пространства X локально компактно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $F \cap U$, где F замкнуто в X и U открыто в X.
(Действительно, если $Y \subset X$ локально компактно, то Y открыто в $\overline{Y}$ (из ③), и можно положить $F = \overline{Y}$ и в качестве U взять открытое в X множество, дающее Y в пересечении с $\overline{Y}$; обратная импликация очевидна.)

⑤ $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ локально компактно тогда и только тогда, когда все X_α локально компактны и все, за исключением конечного числа, компактны.
(Надо вспомнить, что сомножители замкнуто вкладываются в произведение и в окрестность (любой точки) с компактным замыканием вписать каноническую окрестность (замыкание которой тоже обязано быть компактным), которая имеет вид произведения; сомножители в этом произведении должны быть компактными.)

Не нужно

⑥ Характер*) произвольной точки x в локально компактном хаусдорфовом пространстве X равен
$\psi(x,X)=\min\{|\mathcal{U}|: \mathcal{U}$ — семейство открытых подмножеств X, $\bigcap\mathcal{U}=\{x\}\}$.**)

□ Случай $\psi(x,X)<\aleph_0$ тривиален, поэтому будем считать, что $\psi(x,X)=\kappa\geq\aleph_0$. Пусть $\{x\}=\bigcap_{\alpha\in A}V_\alpha$, где $|A|=\kappa$, V_α открыты. Для каждого $\alpha\in A$ пусть U_α, $\overline{U_\alpha}\subset V_\alpha$, — открытая окрестность x с компактным замыканием. Имеем $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha=\{x\}$. Для каждой открытой окрестности U точки x множества $(\overline{U_{\alpha_0}}\setminus U)\setminus\overline{U_\alpha}$, где α_0 — фиксированный элемент A и $\alpha\in A$, образуют открытое покрытие компакта $\overline{U_{\alpha_0}}\setminus U$. Выделим конечное подпокрытие $\{(\overline{U_{\alpha_0}}\setminus U)\setminus\overline{U_{\alpha_i}} : i=1,\dots,n\}$. Имеем $(\overline{U_{\alpha_0}}\cap\overline{U_{\alpha_1}})\cap\dots$ $\dots\cap(\overline{U_{\alpha_0}}\cap\overline{U_{\alpha_n}})\subset U$, значит, $U_{\alpha_0}\cap\dots\cap U_{\alpha_n}\subset U$. Таким образом, любая (открытая) окрестность x содержит конечное пересечение элементов семейства $\{U_\alpha:\alpha\in A\}$. Поскольку $|A|=\kappa\geq\aleph_0$, мощность множества всех таких конечных пересечений равна κ, и все эти пересечения образуют базу окрестностей x. ■

⑦ Следствие. Для каждого локально компактного хаусдорфова пространства X $w(X)\leq|X|$.
(Надо заметить, что всегда $\psi(x,X)\leq|X|$ (если $X\in T_1$); значит, для данного X $\chi(x,X)\leq|X|$ $\forall x\in X$, и семейство $\bigcup\{\mathcal{B}(x):x\in X\}$, мощность которого не превосходит $|X|$, если $|\mathcal{B}(x)|\leq|X|$ (в случае бесконечного X), образует базу X, если каждое $\mathcal{B}(x)$ — база окрестностей $x\in X$. Случай конечного X очевиден.)

⑧ Если X локально компактно, $Y\in T_2$ и $f: X\to Y$ — открытое***) отображение, то Y локально компактно.
(Очевидно.)

Для замкнутых***) отображений это не так: достаточно рассмотреть отображение $f: A^*_{x_0}\times\mathbb{N}\to V_{x_0}$, где $A^*_{x_0}=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ — обычная сходящаяся последовательность (подпространство $\mathbb{R}$), $V_{x_0}=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\times\mathbb{N}$ — веер Фреше–Урысона (см. раздел о сходимости) и $f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0\\ (x,y), & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$

---

*) Напомним, что это $\chi(x,X)=\min\{|\mathcal{B}(x)|: \mathcal{B}(x)$ — база открытых окрестностей x в $X\}$.
**) Кардинал $\psi(x,X)$ называется псевдохарактером X в x.
***) Отображение открыто (замкнуто), если оно непрерывно и образ любого открытого (замкнутого) множества открыт (замкнут).

Нужно

Паракомпактные пространства

Паракомпактность — важнейшее обобщение компактности хотя бы потому что она позволяет вкладывать локально евклидовы*) пространства в евклидовы.

Для удобства повторим начало раздела о компактах:

Определение. Пусть X, A и B — множества и $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathscr{F}' = \{F'_\beta\}_{\beta\in B}$ — семейства подмножеств X. Говорят, что $\mathscr{F}'$ *вписано* в $\mathscr{F}$, и пишут $\mathscr{F}' \leqslant \mathscr{F}$ или $\mathscr{F}' \prec \mathscr{F}$, если для любого $F' \in \mathscr{F}'$ найдётся $F \in \mathscr{F}$ такое, что $F' \subset F$.

Отношение вписанности не является порядком (нет антисимметричности), но это предпорядок (есть рефлексивность и транзитивность) и даже направление. Вписанное семейство в некотором смысле мельче исходного.

Определение. Пусть X — топологическое пространство и A — множество. Семейство $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ подмножеств X *локально конечно*, если у каждой точки $x \in X$ найдётся окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов $\mathscr{F}$.

Определение. Топологическое пространство *паракомпактно*, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются *паракомпактами*.

NB В этом определении нельзя заменить "вписанное покрытие" на "подпокрытие", хотя в определении, например, компактности неважно, какой термин выбрать.

Прежде чем переходить к свойствам паракомпактных пространств, отметим одно уникальное чрезвычайно удобное свойство локально конечных семейств множеств.

Опр. Семейство ~~F~~ H подмножеств топологического пространства X называется <u>консервативным</u>, если для всякого $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ имеем $\overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}'} F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}'} \overline{F}$.

H $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$

*) Точнее, если X — паракомпактное пространство и у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$ (n одно для всех), то несложно вложить X в $\mathbb{R}^N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Такие X называются <u>топологическими многообразиями</u>.

Нужно

Предл. | Всякое локально конечное семейство консервативно.

□ Пусть $\mathcal{F}$ — локально конечное семейство подмножеств X и $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Включение $\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}'} \overline{F} \subset \overline{\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}'} F}$ следует из монотонности оператора замыкания. Проверим обратное включение. Пусть $x \notin \bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}'} \overline{F}$, и пусть U — окрестность x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов $\mathcal{F}$ и, следовательно, $\mathcal{F}'$. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — все элементы $\mathcal{F}'$, пересекающие U. Положим $V = U \setminus (\overline{F_1} \cup \dots \cup \overline{F_n})$. Очевидно, V — окрестность x и $V \cap \overline{\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}'} F} = \varnothing$. ■

Свойства паракомпактных пространств

① | Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.

□ Пусть X — паракомпакт. Покажем сперва, что X регулярно.

Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \in X \setminus F$. У всякой точки $y \in F$ существует открытая окрестность U_y такая, что $x \notin \overline{U_y}$. Семейство $\{X \setminus F\} \cup \{U_y : y \in F\}$ — открытое покрытие X. Пусть $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное покрытие. Положим $V = \bigcup\{V_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. В силу консервативности локально конечных семейств имеем $\overline{V} = \bigcup\{\overline{V_\alpha} : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. Но всякое V_α, пересекающее F, содержится в некотором U_y. Значит, из $V_\alpha \cap F \neq \varnothing$ следует, что $x \notin \overline{V_\alpha}$. Поэтому $x \notin \overline{V}$.

Нормальность доказывается аналогично. Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые подпространства X. Поскольку X регулярно, у всякой точки $y \in F_2$ есть открытая окрестность U_y, замыкание которой не пересекается с F_1. Получаем $\mathcal{C} = \{X \setminus F_2\} \cup \{U_y : y \in F_2\}$ и так же, как и выше, получаем окрестность V множества F_2, замыкание которой не пересекается с F_1. Множества $X \setminus \overline{V}$ и V открыты, не пересекаются и $F_1 \subset X \setminus \overline{V}$, $F_2 \subset V$. ■

② | Паракомпактность наследуется замкнутыми подпространствами.
(Доказывается как для компактов; надо заметить, что если $Y \subset X$ и $\mathcal{C}$ — локально конечное покрытие X, то $\{U \cap Y : U \in \mathcal{C}\}$ — локально конечное покрытие Y.)

③ не нужно
Дальше нужно

③ Паракомпактность не конечно мультипликативна (т.е. $\exists$ паракомпакты X и Y такие, что $X\times Y$ не паракомпактно; пример — $X=Y=$ стрелка Зоргенфрея), однако произведение паракомпакта и компакта — паракомпакт.

□ Пусть X — паракомпакт и K — компакт. Рассмотрим открытое покрытие $\mathcal{U}$ произведения $X\times K$. Для каждой точки $(x,y)\in X\times K$ выберем открытые окрестности $U_{x,y}\subset X$ точки x и $V_{x,y}\subset K$ точки y так, что $U_{x,y}\times V_{x,y}$ содержится в некотором $U\in\mathcal{U}$. Для каждого x $\{V_{x,y}: y\in K\}$ — покрытие K; выберем конечное подпокрытие $\{V_{x,y_i}: i=1,\dots,n_x\}$. Положим $U_x=\bigcap_{i=1}^{n_x}U_{x,y_i}$. Получим открытое покрытие $\{U_x: x\in X\}$ паракомпакта X. Впишем в него локально конечное покрытие $\{W_\alpha:\alpha\in A\}$. Положим
$$\mathcal{W}=\{W_\alpha\times V_{x,y_i}: \alpha\in A, x\in W_\alpha, i=1,\dots,n_\alpha\}.$$
Это открытое покрытие $X\times K$. У каждой точки $x\in X$ есть окрестность O, пересекающая лишь конечное число W_α; легко видеть, что $O\times K$ — открытое множество в $X\times K$, пересекающее лишь конечное число элементов $\mathcal{W}$. Значит, $\mathcal{W}$ локально конечно.
■ По построению оно вписано в $\mathcal{U}$.

Опр. Семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ непрерывных отображений топологического пространства X в $[0,1]$ называется <u>разбиением единицы</u> на X, если $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)=1$ $\forall x\in X$ (это означает, что $\forall x\in X$ лишь конечное*) число значений $f_\alpha(x)$ отлично от нуля и $\sum_{\alpha: f_\alpha(x)\neq 0} f_\alpha(x)=1$).

Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на X <u>подчинено покрытию</u> $\mathcal{C}$ пространства X, если покрытие $\mathcal{F}=\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha\in A}$ вписано в $\mathcal{C}$. Разбиение единицы <u>локально конечно</u>, если $\mathcal{F}$ локально конечно.

Лемма. Для любого локально конечного открытого покрытия $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in A\}$ паракомпакта X найдётся открытое покрытие $\mathcal{V}=\{V_\alpha:\alpha\in A\}$ такое, что $\mathcal{V}$ локально конечно и $\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$ $\forall\alpha\in A$.**)

□ Поскольку X регулярно, существует открытое покрытие $\mathcal{W}$ пространства X такое, что $\{\overline{W}: W\in\mathcal{W}\}$ вписано в $\mathcal{U}$. Возьмём локально конечное открытое покрытие $\{O_\beta:\beta\in B\}$, вписанное в $\mathcal{W}$. Для каждого $\beta\in B$ выберем $\alpha(\beta)\in A$ так, что $\overline{O_\beta}\subset U_{\alpha(\beta)}$, и положим $V_\alpha=\bigcup\{O_\beta:\alpha(\beta)=\alpha\}$, если $\exists\beta\in B:\alpha=\alpha(\beta)$, и $V_\alpha=\varnothing$, если $\nexists\beta:\alpha=\alpha(\beta)$. Очевидно, $\mathcal{V}=\{V_\alpha:\alpha\in A\}$ — открытое покрытие пространства X (каждая точка $x\in X$ принадлежит некоторому O_β). В силу консервативности $\{O_\beta:\beta\in B\}$ имеем $\overline{V_\alpha}=\bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha}\overline{O_\beta}\subset U_\alpha$. Локальная
■ конечность $\mathcal{V}$ вытекает из локальной конечности $\mathcal{U}$.

*) Иногда требуют, чтобы не более чем счётное число $f_\alpha(x)$ было отлично от 0 и чтобы соответствующий ряд сходился к 1.
**) Когда $\mathcal{F}_1=\{X_\alpha:\alpha\in A\}$, $\mathcal{F}_2=\{Y_\alpha:\alpha\in A\}$ и $X_\alpha\subset Y_\alpha$ $\forall\alpha\in A$, говорят, что $\mathcal{F}_1$ <u>комбинаторно вписано</u> в $\mathcal{F}_2$.

Нужно (i) ⇒ (ii)

T. 1 Для каждого T_1-пространства X следующие условия равносильны:
(i) X — паракомпакт;
(ii) для каждого открытого покрытия X найдётся подчинённое ему локально конечное разбиение единицы;
(iii) для каждого открытого покрытия X найдётся подчинённое ему разбиение единицы.

□ (i) ⇒ (ii): Пусть $\mathcal{C}$ — любое открытое покрытие X, и пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. По лемме найдётся замкнутое покрытие $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ такое, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ $\forall \alpha \in A$. Пользуясь леммой Урысона, для каждого $\alpha \in A$ найдём непрерывную функцию $g_\alpha : X \to [0,1]$ такую, что $g_\alpha(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\alpha$ и $g_\alpha|_{F_\alpha} \equiv 1$. Полагая $g(x) = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$, мы получим непрерывную функцию $X \to \mathbb{R}$ (потому что $\mathcal{U}$ локально конечно, а, значит, у каждой $x \in X$ есть окрестность, в которой g — сумма конечного числа непрерывных функций и потому непрерывна; тем более, g непрерывна в x). Искомое разбиение единицы — это $\{\frac{g_\alpha}{g} : \alpha \in A\}$.

(iii) ⇒ (i) Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие X и $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — подчинённое ему разбиение единицы. Для каждого $x_0 \in X$ выберем $\alpha_0 \in A$ такое, что $f_{\alpha_0}(x_0) > 0$. Заметим, что найдутся окрестность U_0 точки x_0 и конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset A$ такие, что $f_\alpha(x) < f_{\alpha_0}(x)$ при $x \in U_0$ и $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k$: годятся $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \{\alpha \in A : f_\alpha(x) \neq 0\}$ и $U_0 = \{x \in X : 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(x) < f_{\alpha_0}(x)\}$. Выбрав теперь α_0 более конкретно, а именно, так, чтобы было $f_{\alpha_0}(x) \le f_{\alpha_i}(x)$ для всех $i \le k$, мы видим, что функция $f : x \mapsto \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$ совпадает с $\max_{i \le k} f_{\alpha_i}(x)$ на открытой окрестности U_0 точки x_0 и потому непрерывна в точке x_0 (и во всей окрестности U_0). Из произвольности выбора x_0 вытекает непрерывность f на X. Для каждого $\alpha \in A$ множество $V_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > \frac{1}{2} f(x)\}$ открыто, и семейство $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ вписано в $\mathcal{U}$ (ясно, что $f(x) > 0$ $\forall x \in X$). Осталось заметить, что $V_0 = \{x \in X : 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(x) < \frac{1}{2} f(x)\} = \{x \in X : \sum_{\alpha \neq \alpha_i, i \le k} f_\alpha(x) < \frac{1}{2} f(x)\}$ — открытая окрестность точки x_0 (обозначения те же, что и выше), которая пересекается лишь с конечным числом множеств V_α, что доказывает локальную конечность семейства $\mathcal{V}$. ■

Не нужно

Разбиения единицы находят широчайшее применение в математике, особенно в теории многообразий, где разбиения единицы — один из основных инструментов: по определению *топологическое многообразие* — это паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$ (число n от точки не зависит). (При работе с гладкими многообразиями рассматривают гладкие разбиения единицы.) Множества окрестностей, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, есть открытые покрытия многообразия, и разбиения единицы позволяют "склеивать" структуры, определённые на отдельных таких окрестностях, в частности, определять специальные метрики, связности, интегралы и пр.

Мы проиллюстрируем применение разбиений единицы следующей теоремой:

$\boxed{\text{Т.}}$ Всякое топологическое многообразие гомеоморфно вкладывается в подпространство

$$\sigma[0,1]^\kappa = \{(x_\alpha)_{\alpha<\kappa} : x_\alpha = 0 \text{ для всех, кроме конечного числа, } \alpha<\kappa\}$$

для некоторого кардинала κ.

□ Для каждой точки x многообразия X зафиксируем окрестность U_x, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$; пусть $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм, $\varphi_x(x) = (0,\dots,0)$ (можно добиться). Положим $V_x = \varphi_x^{-1}((-1,1)^n)$. В покрытие $\{V_x : x\in X\}$ впишем локально конечное покрытие $\{W_\alpha : \alpha\in A\}$ и возьмём подчинённое ему разбиение единицы $\{f_\alpha : \alpha\in A\}$. Для каждого $\alpha\in A$ выберем $x\in X$ такое, что $W_\alpha \subset V_x$, и положим $V_\alpha = V_x$, $U_\alpha = U_x$ и $\varphi_\alpha = \varphi_x : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Для $y\in X$ будем записывать $\varphi_\alpha(y)$ (это n-мерный вектор) как $(y_1^\alpha,\dots,y_n^\alpha)\in\mathbb{R}^n$. Наконец, положим

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} (f_\alpha(x)\cdot x_1^\alpha,\dots,f_\alpha(x)\cdot x_n^\alpha, f_\alpha(x))\in\mathbb{R}^{n+1}, & \text{если } x\in U_\alpha,\\ (0,\dots,0,0)\in\mathbb{R}^{n+1}, & \text{если } x\in X\setminus U_\alpha.\end{cases}$$

Получили отображение $\Psi_\alpha : X\to\mathbb{R}^{n+1}$. Оно непрерывно: прообраз не содержащего $(0,\dots,0)$ открытого множества — это открытое подмножество открытого множества U_α (потому что φ_α и f_α непрерывны на U_α), а прообраз открытого множества, содержащего $(0,\dots,0)$ — это открытое подмножество U_α, объединённое с открытым множеством $X\setminus\overline{V}_\alpha$ (потому что $f_\alpha|_{X\setminus W_\alpha}\equiv 0$ и $W_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$). Семейство $\{\Psi_\alpha : \alpha\in A\}$ разделяет точки: если $x\neq y$ и $\exists\alpha\in A : f_\alpha(x)\neq f_\alpha(y)$, то $\Psi_\alpha(x)\neq\Psi(y)$ (последние координаты отличаются), а если $f_\alpha(x)=f_\alpha(y)$ $\forall\alpha$, то найдётся α, для которого $f_\alpha(x)=f_\alpha(y)\neq 0$ (потому что $\sum_\alpha f_\alpha(x)=1$); для этого α $x,y\in W_\alpha$, и $\varphi_\alpha(x)\neq\varphi_\alpha(y)$ (так как φ_α — гомеоморфное вложение), откуда $\Psi_\alpha(x)\neq\Psi_\alpha(y)$.

Итак, $\Delta\Psi_\alpha$ — непрерывная инъекция. Из того, что X локально компактно (хотя бы потому, что все $\overline{V}_x$ компактны), и того, что непрерывная инъекция любого компакта является гомеоморфным вложением, несложно вывести, что отображение $\Delta \Psi_\alpha$ является гомеоморфным вложением всего пространства X (достаточно заметить, что обратное отображение непрерывно в каждой точке).

Мы показали, что $\Delta_{\alpha\in A} \Psi_\alpha : X \to (\mathbb{R}^{n+1})^A$ — гомеоморфное вложение. Ясно, что $\Delta_{\alpha\in A} \Psi_\alpha(X) \subset ([0,1]^{n+1})^A$ (потому что $\varphi_\alpha(V_\alpha) \subset [0,1]^n$, а $f_\alpha|_{X\setminus V_\alpha} \equiv 0$). Поскольку $f_\alpha(x)$ отлично от нуля лишь для конечного числа индексов α при каждом x, имеем $\Delta_{\alpha\in A} \Psi_\alpha(X) \subset \sigma([0,1]^{n+1})^A = \sigma[0,1]^\kappa$, где $\kappa = |A|$ (или $\kappa = (n+1)\cdot|A|$, если A конечно).

Следствие | Всякое топологическое многообразие метризуемо.

(Действительно, $\sigma[0,1]^\kappa$ метризуемо: можно положить, например, $d((x_\alpha)_{\alpha<\kappa}, (y_\alpha)_{\alpha<\kappa}) = \max_{\alpha\in A} |x_\alpha - y_\alpha|$).

Зам. В теореме можно положить κ равным весу X, потому что из любого открытого покрытия любого пространства X можно выделить подпокрытие мощности $w(X)$: достаточно вписать в данное покрытие покрытие элементами базы (новое покрытие автоматически будет содержать $\le w(X)$ элементов), а потом заменить каждый элемент нового покрытия на какой-нибудь содержащий его элемент старого. При выделении подпокрытия локальная конечность не нарушится.

В заключение сформулируем без доказательства две трудные теоремы о паракомпактах.

$\boxed{\text{Т.}}$ | (Стоун) Всякое метризуемое пространство паракомпактно.

$\boxed{\text{Т.}}$ | (Майкл) Паракомпактность сохраняется замкнутыми отображениями хаусдорфовых пространств.

Отметим, что открытыми отображениями паракомпактность не сохраняется: всякое топологическое пространство есть образ паракомпакта при открытом отображении.