Нужно

Компактификации

Важнейшее следствие теорем Тихонова состоит в том, что всякое тихоновское пространство можно компактифицировать, т.е. вложить в некоторый компакт всюду плотным образом.

Опр. Пара (K, c), где K — компакт, а $c: X \to K$ — гомеоморфное вложение пространства X в K такое, что $\overline{c(X)} = K$, называется <u>компактификацией</u> пространства X, или <u>компактным хаусдорфовым расширением</u> пространства X.

<u>Зам.</u> Если некоторое пространство X вкладывается в компакт K, т.е. существует гомеоморфизм $f: X \to Y$ на подпространство $f(X) = Y$ пространства K, то ясно, что пара $(\overline{Y}, i \circ f)$, где $i: Y \to \overline{Y}$ — тождественное вложение, является компактификацией X. Следовательно, каждое пространство, вложимое в компакт, обладает компактификацией.

<u>Зам.</u> Поскольку все компакты нормальны и, следовательно, являются тихоновскими пространствами, а тихоновость (в отличие от нормальности*)) наследственна, любое пространство, обладающее компактификацией, обязано быть тихоновским.

Т.1 Пространство X обладает компактификацией в том и только том случае, если оно тихоновское.

Т.2 Каждое тихоновское пространство X имеет такую компактификацию (K, c), что $w(X) = w(K)$.

Сама по себе компактификация, предоставляемая теоремами Тихонова, не так важна, как сам факт её существования: он позволяет нам рассмотреть всевозможные компактификации данного пространства и сравнить их между собой, что приводит к результатам исключительной важности.

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы будем понимать не только пару (K, c), но и любой компакт K, содержащий X (точнее, его гомеоморфную копию)

---

*) Кстати, теоремы Тихонова дают также неиссякаемый запас примеров, демонстрирующих ненаследственность нормальности — любое ненормальное тихоновское пространство X вкладывается в (нормальный) компакт $[0,1]^{w(X)}$

в качестве плотного подпространства. Компактификации (в этом смысле) пространства X обычно обозначаются cX, γX, bX и т.п., где c, γ, b — обозначение гомеоморфного вложения X в соответствующую компактификацию. Например запись cX обозначает компакт, но подразумевает, что $c: X \to cX$, его подотображение $\tilde{c}: X \to c(X)$ — гомеоморфизм и $\overline{c(X)} = cX$.

<u>Опр.</u> Назовём компактификации c_1X и c_2X пространства X <u>эквивалентными</u>, если существует гомеоморфизм $f: c_1X \to c_2X$ такой, что $f(c_1(x)) = c_2(x)$ $\forall x \in X$; т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} c_1X \arrow[r, "f"] & c_2X \\ X \arrow[u, "c_1"] \arrow[r, "id_X"'] & X \arrow[u, "c_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна (двигаясь по стрелочкам вверх и вправо, мы получим тот же результат, что и (двигаясь) вправо и вверх).

Таким образом, две комп-и пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и X вложено в них одинаковым образом. Легко проверяется, что эквивалентность компактификаций и в самом деле является отношением эквивалентности.

В дальнейшем мы будем часто отождествлять эквивалентные компактификации; любой класс эквивалентности компактификаций будет рассматриваться как одна компактификация и будет обозначаться символом cX, где cX — произвольная компактификация этого класса.

<u>Зам.</u> Любые две компактификации любого компакта K эквивалентны друг другу и компактификации (K, id_K), которую мы отождествляем с самим K.

Чтобы иметь возможность рассмотреть множество всех компактификаций данного пространства (в частности, упорядочить его и найти наибольший элемент, что является нашей ближайшей целью), надо сперва убедиться, что это действительно множество, а не класс (в смысле теории множеств), в частности, что мощности всех компактификаций данного пространства ограничены. Для этого пригодится следующая лемма.

<u>Лемма</u> Для любого $X \in T_2$ выполнено неравенство $|X| \le 2^{2^{d(X)}}$.

$\square$ Пусть $D \subset X$, $\overline{D} = X$, $|D| = d(X)$, и пусть $\{\mathfrak{B}(x)\}_{x\in X}$ — система окрестностей в X. Каждому $x \in X$ сопоставим $\mathfrak{D}(x) = \{U \cap D : U \in \mathfrak{B}(x)\} \subset \mathfrak{P}(D)$. Поскольку $\overline{U \cap D} = \overline{U}$ для любого открытого U, имеем $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathfrak{D}(x)\} = \{x\}$. Значит, $\mathfrak{D}(x) \ne \mathfrak{D}(y)$ при $x \ne y$, и $|X| = |\{\mathfrak{D}(x) : x \in X\}| \le 2^{2^{|D|}}$. $\blacksquare$

Нужно

Ясно, что если Z плотно в Y, а Y плотно в X, то Z плотно в X; поэтому d(компактиф-я) $\leq d(X)$. Получаем теорему:

Т.3 Мощность каждой компактификации K пространства X удовлетворяет неравенству $|K| \leq 2^{2^{d(X)}}$.

Отсюда вытекает, что вес K тоже ограничен (база — семейство подмножеств K, и её мощность не превосходит $2^{|K|}$). Значит, все компактификации X гомеоморфны подпространствам $[0,1]^{2^{2^{2^{d(X)}}}}$ (по первой теореме Тихонова), и мы действительно можем рассмотреть множество всех компактификаций пространства X, точнее говоря, множество классов эквивалентных компактификаций X, являющихся подпространствами тихоновского куба $[0,1]^{2^{2^{2^{d(X)}}}}$. Обозначим это множество $\mathcal{C}(X)$.

Теперь упорядочим $\mathcal{C}(X)$. Положим $c_1X \leq c_2X$, если существует непрерывное отображение $f: c_1X \to c_2X$ такое, что $f \circ c_1 = c_2$. Таким образом, неравенство $c_2X \leq c_1X$ означает, что c_1X можно отобразить на c_2X таким образом, что каждая точка пр-ва X, рассматриваемого как подпространство каждого из пространств c_1X и c_2X, перейдёт в себя. Легко видеть, что если $c_1X \leq c_2X$ и $c_2X \leq c_3X$, то $c_1X \leq c_3X$. Значит, чтобы показать, что $\leq$ является порядком на семействе $\mathcal{C}(X)$, достаточно доказать следующую теорему.

Т.4 Компактификации c_1X и c_2X пространства X эквивалентны тогда и только тогда, когда $c_1X \leq c_2X$ и $c_2X \leq c_1X$.

□ Ясно, что если c_1X и c_2X эквивалентны, то $c_1X \leq c_2X$ и $c_2X \leq c_1X$ (гомеоморфизм непрерывен в обе стороны).

Предположим, что $c_1X \leq c_2X$ и $c_2X \leq c_1X$. Пусть $f_1: c_1X \to c_2X$ и $f_2: c_2X \to c_1X$ таковы, что $f_1 \circ c_1 = c_2$ и $f_2 \circ c_2 = c_1$. Нам надо доказать, что f_1 — биекция, тогда из непрерывности f_1 будет следовать, что это гомеоморфизм (потому что c_1X — компакт; см. следствие к теореме 3 о компактах). Мы докажем даже больше — что $f_2 = f_1^{-1}$:

$$f_2 \circ f_1(x) = x \text{ при всех } x \in c_1X.$$

Действительно, композиция $f_2 \circ f_1: c_1X \to c_1X$ удовлетворяет равенству $f_2 \circ f_1 \circ c_1 = c_1$; это означает, что $f_2 \circ f_1(x) = x$ для $x \in c_1(X) \subset c_1X$, т.е. сужение (непрерывного) отображения $f_2 \circ f_1$ на всюду плотное подпространство $c_1(X)$ пространства c_1X совпадает с сужением тождественного (тоже непрерывного) отображения id_{c_1X}, а потому равно ему. ■

Нужно (кроме полезных предложения и леммы)

NB При чтении теоремы 4 и в дальнейшем, когда речь идёт о компактификации cX, следует всё время помнить, что $c(X)$ — это попросту гомеоморфная копия X в cX, та самая, которая всюду плотна в cX. Можно было бы писать просто X вместо $c(X)$. В дальнейшем мы так и будем поступать, когда это удобно. Разность $cX \setminus c(X)$ (или $cX \setminus X$) называется <u>наростом</u> cX.

Предл. Если c_1X и c_2X — компактификации пространства X и $f: c_1X \to c_2X$ — непрерывное отображение, которое удовлетворяет условию $f \circ c_1 = c_2$, то f переводит нарост в нарост, т.е.
$$f(c_1(X)) = c_2(X) \quad \text{и} \quad f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X).$$

Это утверждение немедленно вытекает из следующего более общего утверждения.

Лемма Пусть $Y \subset X$, X хаусдорфово, $\overline{Y} = X$ и $f: X \to Z$ — непрерывное отображение. Если $f|_Y : Y \to f(Y)$ *) — гомеоморфизм, то $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \varnothing$.

□ Пусть $x \in X \setminus Y$ и $f(x) \in f(Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $X = Y \cup \{x\}$ и $Z = f(X) = f(Y)$. Найдём $y \in Y$, для которого $f(y) = f(x)$. Пусть U и V — непересекающиеся окрестности точек x и y. Множество $f(Y \setminus V) = f_Y(Y \setminus V)$ замкнуто в $Z = f(Y)$, потому что $f_Y : Y \to f(Y)$ — гомеоморфизм; значит, $f^{-1}(f(Y \setminus V)) = Y \setminus V$ замкнуто в X. Однако $x \notin \overline{V}$, ибо $x \in U$ и $U \cap V = \varnothing$; поскольку $\overline{Y} = \overline{Y \setminus V} \cup \overline{V} = Y \setminus V \cup \overline{V}$ и $x \in \overline{Y} = X$, получаем $x \in Y$. Противоречие. ▨

Перейдём к рассмотрению "экстремальных" (наибольших и наименьших) компактификаций.

Опр. Пусть X — тихоновское пространство. Наибольший элемент семейства $\mathcal{C}(X)$ называется <u>стоун-чеховской компактификацией</u>, или <u>стоун-чеховским расширением</u>, или <u>компактификацией Стоуна-Чеха</u>, или <u>максимальной компактификацией</u> пространства X и обозначается βX.

$\boxed{\text{Т.5}}$ Для каждого тихоновского пространства X существует βX.

□ Рассмотрим $\prod\limits_{cX \in \mathcal{C}(X)} cX$ и отображение $c_\Delta : \mathop{\Delta}\limits_{cX \in \mathcal{C}(X)} c : X \to \prod\limits_{cX \in \mathcal{C}(X)} cX$, которое по теореме о диагональном отображении является гомеоморфным вложением. Компактификация $c_\Delta X = \overline{c_\Delta(X)} \subset \prod\limits_{cX \in \mathcal{C}(X)} cX$ наибольшая: $\forall\, c_0X \in \mathcal{C}(X)$ проекция $p_{c_0X} : \prod\limits_{cX \in \mathcal{C}(X)} cX \to c_0X$ удовлетворяет условию $p_{c_0X} \circ c_\Delta = c_0$, поэтому $c_0X \le c_\Delta X$ при всех $c_0X \in \mathcal{C}(X)$, так что $c_\Delta X = \beta X$. ▨

*) Здесь $f|_Y : Y \to f(Y)$ — не сужение, а подотображение отображения f (область значений тоже сужается). Такое смешение обозначений не приводит к путанице, поскольку область значений явно указана. Эта вольность часто допускается в литературе.

Второе утверждение теоремы 6 ("Эта компактификация...") не нужно

Наименьшие компактификации существуют не для всех пространств.

Опр. Топологическое пространство X называется <u>локально компактным</u>*), если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность с компактным замыканием.

$\boxed{\text{Т.6}}$ <u>Теорема об александровской компактификации</u>

Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX, для которой нарост $\alpha X \setminus X$ состоит из одной точки. Эта компактификация является наименьшим элементом $\mathcal{C}(X)$, а её вес равен весу X.

□ Возьмём любую точку $\xi \notin X$ и положим $\alpha X = X \cup \{\xi\}$. Объявим открытыми в αX все открытые в X множества, а также все множества вида $\{\xi\} \cup (X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X. Легко видеть, что αX — компактификация пространства X (и, значит, $X \in T_{3\frac{1}{2}}$).

Пусть $cX \in \mathcal{C}(X)$. Соотношение $\alpha X \leq cX$ будет доказано, если мы покажем, что отображение $f\colon cX \to \alpha X$, определённое правилом

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(c^{-1}(x)) & \text{при } x \in c(X), \\ \xi & \text{при } x \in cX \setminus c(X) \end{cases}$$

(если считать, что $X = c(X)$, то это отображение переводит нарост $cX \setminus X$ в нарост-точку $\{\xi\}$, а остальные точки оставляет на месте), непрерывно и удовлетворяет условию $f \circ c = \alpha$. Равенство $f \circ c = \alpha$ следует прямо из определения, а чтобы доказать непрерывность, достаточно заметить, что $c(X)$ открыто в cX (тогда прообраз любого открытого множества будет либо открытым подмножеством $c(X)$, а значит, и cX, либо дополнением до компакта в cX, которое всегда открыто). Итак, покажем, что локально компактное пространство $c(X)$ открыто в cX. Более того, любое локально компактное пространство Y открыто в любом хаусдорфовом пространстве $Z \supset Y$ таком, что $\overline{Y} = Z$. Действительно, каждая точка $x \in Y$ обладает окрестностью U в Y такой, что $\overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y$ компактно и потому замкнуто в Z. Имеем $\overline{U}^Z = \overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y \subset Y$. Пусть W — открытое множество в Z, для которого $U = Y \cap W$. Имеем $x \in W \subset \overline{W} = \overline{Y \cap W} = \overline{U} \subset Y$ (здесь использовалась плотность множества Y и полезный факт перед разделом о непрерывных отображениях), откуда следует, что каждая точка $x \in Y$ имеет окрестность, содержащуюся в Y, т.е. Y открыто.

Покажем теперь, что $w(\alpha X) = w(X)$. Пусть $\mathcal{B}'$ — база X, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. Выберем из неё базу $\mathcal{B}$ мощности $w(X)$. Объявим предбазой новой топологии на $X \cup \{\xi\}$ семейство $\mathcal{B} \cup \{\{\xi\} \cup X \setminus \overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$. Эта предбаза имеет мощность $|\mathcal{B}| = w(X)$ и потому определяет топологию веса $w(X)$, которая хаусдорфова и слабее топологии (т.е. содержится в топологии) пространства αX, а потому совпадает с ней (топологию компакта нельзя ослабить). ▨

*) Вообще, говорят, что пространство X <u>локально</u> обладает свойством $\mathcal{P}$, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность (в широком смысле, т.е. не обязательно открытая) со свойством $\mathcal{P}$.

Нужно определение и замечания
(второе замечание ссылается на теорему 7, но оно очень легко доказывается и без неё)

Т. 7 Если в семействе $\mathcal{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного тихоновского пространства X есть наименьший элемент cX (относительно порядка $\leq$), то X локально компактно и cX эквивалентно компактификации αX из предыдущей теоремы.

□ Достаточно показать, что нарост $cX \setminus c(X)$ является одноточечным множеством, так как тогда X локально компактно и αX эквивалентна cX по теоремам 4 и 7.

Предположим, что нарост $cX \setminus c(X)$ содержит две различные точки x_1 и x_2. Пространство $X_1 = cX \setminus \{x_1, x_2\}$ локально компактно (очевидно), и αX_1 является также компактификацией пространства X: $\alpha X_1 = c_1 X$ для некоторого $c_1: X \to c_1 X$. Поскольку $cX \leq c_1 X$ (по условию), существует отображение $f: c_1 X \to cX$ такое, что $f|_{c(X)} = id_{c(X)}$. Непрерывные отображения, совпадающие на всюду плотном подмножестве, равны; значит, $f|_{X_1} = id_{X_1}$, и $c_1 X$ и cX являются также компактификациями пространства X_1 (хотя гомеоморфные вложения $X_1 \to c_1 X$ и $X_1 \to cX$ отличаются от c_1 и c, не сохраняя старые обозначения для них).

Из предложения о непрерывных отображениях компактификаций пространства X, гомеоморфных на X (согласно которому нарост переходит в нарост) вытекает, что $f(c_1 X \setminus X_1) = cX \setminus X_1$, причём $c_1 X = \alpha X_1 = X_1 \cup \{\xi\}$; значит, $f(\{\xi\}) = \{x_1, x_2\}$ — одна точка отображается в две. Этого быть не может. ■

Опр. Компактификация αX локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства X называется <u>александровской компактификацией</u>, или <u>одноточечной компактификацией</u>, или <u>минимальной компактификацией</u> этого пространства.

Зам. Из теоремы 6 (точнее, из самого факта существования компактификации) немедленно вытекает, что всякое локально компактное хаусдорфово пространство вполне регулярно ($\equiv$ является тихоновским).

Зам. Из теорем 6 и 7 вытекает, что хаусдорфово пространство локально компактно тогда и только тогда, когда у него имеется одноточечная компактификация.