Нужна Т. 1

Теоремы Тихонова

Т. 1 <u>Теорема о вложении в тихоновский куб</u>*)
Всякое тихоновское пространство веса $\kappa \geq \aleph_0$ вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^\kappa$; при этом $w([0,1]^\kappa) = \kappa$.

□ Поскольку $[0,1]$ — тихоновское пространство, $[0,1]^\kappa$ тоже является тихоновским пространством. Из того, что $w([0,1]) = \aleph_0$, немедленно вытекает наличие предбазы, а значит, и базы мощности κ у пространства $[0,1]^\kappa$. Ясно также, что базы меньшей мощности у него нет: мы сейчас докажем, что любое тихоновское пространство веса κ вкладывается в $[0,1]^\kappa$ (а такие пространства существуют — например, дискретное пространство мощности κ), а вес подпространства не может быть больше веса самого пространства. Значит, $w([0,1]^\kappa) = \kappa$.

Пусть X — тихоновское пространство, $w(X) = \kappa$. Семейство всех функционально открытых множеств (дополнений до прообразов 0 при непрерывных функциях $X \to [0,1]$) составляет его базу. Из этой базы можно выделить базу $\mathcal{B}$ мощности κ. Пусть $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, $|A| = \kappa$. Для каждого $\alpha \in A$ пусть $f_\alpha : X \to [0,1]$ — непрерывная функция такая, что $f_\alpha^{-1}((0,1]) = U_\alpha$. Семейство $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Поскольку X — T_0-пространство, $\mathcal{F}$ разделяет также и точки. Осталось воспользоваться теоремой о диагональном отображении. ▨

<u>Зам.</u> <u>Гильбертовым кирпичом</u> называется подпространство $\prod_{k=0}^{\infty}[0,\frac{1}{2^k}]$ гильбертова пространства $\ell^2 = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\}$ (скалярное произведение в котором определено правилом $((x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$). При этом гильбертов кирпич — это метрическое пространство: метрика на нём есть сужение метрики пространства ℓ^2, и легко проверить, что она порождает тихоновскую топологию, так что кирпич с метрической топологией гомеоморфен $[0,1]^{\aleph_0}$ (потому что все $[0,\frac{1}{2^k}]$ гомеом-ы $[0,1]$).**) (Тихоновская) топология самого куба $[0,1]^{\aleph_0} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ порождается метрикой $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sqrt{\sum_n |x_n - y_n|^2/2^n}$. Действительно, всякая метрическая ε-окр-ть любой точки $(x_{0_n})_{n\in\mathbb{N}}$ содержит тихоновскую каноническую окрестность $\prod_{n=1}^{k}(x_{0_n} - \frac{1}{2^{n+k}}, x_{0_n} + \frac{1}{2^{n+k}}) \times \prod[0,1]$, где k таково, что $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, а любая каноническая окрестность содержит окрестность вида $\prod_{n=1}^{k}(x_{0_n} - \varepsilon, x_{0_n} + \varepsilon) \times \prod[0,1] \supset \frac{\varepsilon}{2^k}$-окрестность.

*) <u>Тихоновским кубом</u> называется произведение вида $[0,1]^\kappa$, где κ — бесконечный кардинал. Тихоновский куб $[0,1]^{\aleph_0}$ называется также <u>гильбертовым кубом</u>.

**) А пространство ℓ^2 гомеоморфно $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ (R. Anderson, 1966). Это трудная теорема, которую ещё

Фреше сформулировал как гипотезу.

Нужно

Вывод 1: любое вполне*) регулярное пространство со счётной базой гомеоморфно подпространству гильбертова куба $[0,1]^{\aleph_0}$

Вывод 2:

Т.2 (<u>Метризационная теорема Урысона</u>) Топологическое пространство со счётной базой метризуемо тогда и только тогда, когда оно (вполне) регулярно.

Вторую, самую знаменитую, теорему Тихонова проще всего доказать на языке ультрафильтров.

<u>Опр.</u> Пусть X — множество. Семейство $\mathcal{F}$ его подмножеств называется <u>фильтром</u> (на X), если
1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F},\ A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$;
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Уже встречалось в разделе о компактах

<u>Опр.</u> Семейство $\mathcal{C}$ подмножеств множества X <u>центрировано</u>, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

<u>Предл. 1</u> Любое центрированное семейство $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ содержится в некотором фильтре на X.

□ Положим $\mathcal{F} = \{A \subset X : \exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ такие, что $\bigcap_{i \le n} C_i \subset A\}$.
■ Ясно, что $\mathcal{F}$ — фильтр и $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Семейство всех фильтров на X, содержащих данное центр. сем-во $\mathcal{C}$, упорядочено отношением включения. Очевидно, если множество $\mathfrak{C}$ фильтров таково, что для любых $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{C}$ имеем либо $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, либо $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$, то $\bigcup \mathfrak{C}$ (т.е. семейство $\{A \subset X : \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{C}$ т. что $A \in \mathcal{F}\}$) является фильтром (это проверяется непосредственно), причём если все фильтры из $\mathfrak{C}$ содержат $\mathcal{C}$, то и $\bigcup \mathfrak{C}$ содержит $\mathcal{C}$. Значит, по лемме Цорна существует максимальный по включению фильтр $\mathcal{F}$, содержащий $\mathcal{C}$. Ясно, что он максимален не только во множестве всех фильтров, содержащих $\mathcal{C}$, но и во множестве всех фильтров вообще (никакой фильтр, не содержащий семейство $\mathcal{C}$, не может содержать $\mathcal{F}$, потому что $\mathcal{F}$ это семейство содержит).

Мы показали, что всякое центрированное семейство множеств содержится в некотором максимальном фильтре.

<u>Опр.</u> Максимальные (по включению) фильтры называются ультрафильтрами.

Итак, всякое центрированное множество содержится в некотором ультрафильтре.

*) Мы увидим, что слово "вполне" лишнее — все регулярные пространства со счётной базой нормальны и потому вполне регулярны.

Нужно

Предл. 2 Фильтр $\mathcal{F}$ на X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда $\forall A\subset X$ либо $A\in\mathcal{F}$, либо $X\setminus A\in\mathcal{F}$.

□ (⇐) Предположим, что $\mathcal{F}'$ — фильтр и $\mathcal{F}'\supset\mathcal{F}$. Пусть найдется $A\subset X$ такое, что $A\in\mathcal{F}'$, но $A\notin\mathcal{F}$. По условию $X\setminus A\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$; поскольку $A\in\mathcal{F}'$ и $X\setminus A\cap A=\varnothing$, $\mathcal{F}'$ не может быть фильтром. Значит, такого A не найдётся, т.е. $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$.

(⇒) Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, и пусть $A\subset X$. Если $\exists B\in\mathcal{F}$ т., что $B\cap A=\varnothing$, то $B\subset X\setminus A$ и по свойству ② фильтров имеем $X\setminus A\in\mathcal{F}$, что и требовалось. Если $A\cap B\neq\varnothing$ для всех $B\in\mathcal{F}$, то семейство $\mathcal{F}\cup\{A\}$, как легко видеть, центрировано и потому содержится в некотором фильтре $\mathcal{F}'$. Этот фильтр $\mathcal{F}'$ содержит $\mathcal{F}$ и не совпадает с ним, что противоречит максимальности $\mathcal{F}$. ■

След. Если $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на X и $A_1,\dots,A_n\subset X$ таковы, что $A_1\cup\dots\cup A_n=X$, то для некоторого $k\le n$ $A_k\in\mathcal{U}$.

□ Если $A_1\notin\mathcal{U}$, то $A_2\cup\dots\cup A_n\in\mathcal{U}$, потому что $A_2\cup\dots\cup A_n\supset X\setminus A_1\in\mathcal{U}$; если $A_1\notin\mathcal{U}$ и $A_2\notin\mathcal{U}$, то $A_3\cup\dots\cup A_n\in\mathcal{U}$, потому что $A_3\cup\dots\cup A_n\supset X\setminus(A_1\cup A_2)=X\setminus A_1\cap X\setminus A_2\in\mathcal{U}$; ...; если $A_1,\dots,A_{n-1}\notin\mathcal{U}$, то $A_n\in\mathcal{U}$, потому что $A_n\supset X\setminus(A_1\cup\dots\cup A_{n-1})=X\setminus A_1\cap\dots\cap X\setminus A_{n-1}\in\mathcal{U}$. ■

Опр. Пусть $(X,\mathcal{T})$ — топологическое пространство. Ультрафильтр $\mathcal{U}$ на множестве X *сходится* к точке $x\in X$ в топологии $\mathcal{T}$, если любая окрестность точки x принадлежит $\mathcal{U}$. Ультрафильтр называется *сходящимся*, если он сходится к некоторой точке.

Предл. 3 Топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.

□ ⇒ Существование ультрафильтра $\mathcal{U}$ на X, который не сходится ни к одной точке $x\in X$, означает, что у любой точки x есть открытая окрестность U_x, не принадлежащая $\mathcal{U}$. Выделив из $\{U_x: x\in X\}$ конечное подпокрытие, придём к противоречию со следствием из предл. 2.

⇐ Если существует открытое покрытие $\mathcal{V}$, которое не содержит конечных подпокрытий, то $\mathcal{C}=\{X\setminus(V_1\cup\dots\cup V_n): n\in\mathbb{N},\ V_i\in\mathcal{V}\}$ — центрированное семейство. Пусть $\mathcal{U}$ — содержащий его ультрафильтр. $\mathcal{U}$ сходится к некоторой точке x. Пусть $V\in\mathcal{V}$, $x\in V$. Тогда $X\setminus V\in\mathcal{C}\subset\mathcal{U}$, но V — окрестность x, она обязана принадлежать $\mathcal{U}$. Противоречие со свойствами ① и ③ фильтра. ■

Нужно

Т.3 | <u>Теорема Тихонова</u>

Произведение любого семейства компактов — компакт.

□ Пусть X_α, $\alpha\in A$, — компакты. Мы уже знаем, что произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ хаусдорфово. Проверим, что оно компактно.

Пусть $\mathcal{U}$ — любой ультрафильтр на X. Для $\alpha\in A$ положим $\mathcal{U}_\alpha = \{A\subset X_\alpha : p_\alpha^{-1}(A)\in\mathcal{U}\}$. Заметим, что $\mathcal{U}_\alpha$ — фильтр. По предложению 2 $\mathcal{U}_\alpha$ также и ультрафильтр (если $A\subset X$ и $p_\alpha^{-1}(A)\notin\mathcal{U}$, то $p_\alpha^{-1}(X_\alpha\setminus A)=X_\alpha\setminus p_\alpha^{-1}(A)\in\mathcal{U}$). Значит, каждый $\mathcal{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha\in X_\alpha$. Положим $x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ и покажем, что $\mathcal{U}$ сходится к x. Пусть U — любая окрестность x. Она содержит окрестность $V=\prod_{\alpha\in A}V_\alpha$ из канонической базы, где $V_\alpha\ne X_\alpha$ лишь для конечного множества координат $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. Для $i=1,\dots,n$ $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ сходится к x_{α_i}, поэтому $p_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})\in\mathcal{U}$. Осталось заметить, что $V=\prod_{\alpha\in A}V_\alpha = \bigcap_{i\le n} p_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ (так как $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha\ne\alpha_1,\dots,\alpha_n$), так что из свойств ② и ③ фильтров вытекает, что $U\in\mathcal{U}$. ■

<u>След.</u>*) | Любая непрерывная функция $f: K\to[0,1]$ на компактном подмножестве K тихоновского пространства X продолжается до непрерывной функции $\hat f: X\to[0,1]$.

□ Вложим X в $[0,1]^\kappa$ (где $\kappa = w(X)$). Поскольку $[0,1]^\kappa$ нормально, будучи компактом, $K\subset X\subset[0,1]^\kappa$ и любой компакт замкнут в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, можем применить теорему Титце–Урысона, согласно которой существует непрерывное продолжение $\tilde f:[0,1]^\kappa\to[0,1]$ функции f. Осталось положить $\hat f=\tilde f|_X$. ■

---

*) Ср. со следствием из теоремы Стоуна–Вейерштрасса.