Нужно

Произведения топологических пространств

Пусть A — произвольное множество и $\mathcal{X}$ — семейство множеств (хотя семейства множеств от множеств ничем не отличаются, так как в теории множеств все элементы всех множеств — снова множества, удобнее как-то отличать множества, чьи элементы мы собираемся рассматривать именно как множества, от множеств, природа элементов которых нас не волнует; поэтому в первом случае мы часто используем слово "семейство").

Предположим, что множества, составляющие семейство $\mathcal{X}$ как-то заиндексированы элементами A, т.е. задано отображение $\varphi: A \to \mathcal{X}$, причём $\varphi(A) = \mathcal{X}$. Тогда мы можем написать $\mathcal{X} = \{\varphi(\alpha) : \alpha \in A\}$ или, что выглядит привычнее, $\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, подразумевая, что $X_\alpha = \varphi(A)$ для некоторого заданного отображения φ. В дальнейшем мы будем использовать именно такую форму записи, а отображение φ не будем упоминать вообще — оно и так явно задано самой записью $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

<u>Декартово произведение</u>, или просто <u>произведение</u>, множеств $X_\alpha, \alpha \in A$, — это множество

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A\}.$$

Для $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ точка $f(\alpha) \in X_\alpha$ называется <u>α-й координатой</u> элемента f произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Как и в случае последовательностей или направленностей (которые тоже суть не что иное как отображения), мы будем записывать элементы f произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ в виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, подразумевая, что $x_\alpha = f(\alpha)$ $\forall \alpha \in A$.

Заметим, что произведение конечного числа, например, двух, множеств X и Y в нашем смысле — не совсем то же самое, что обычное декартово произведение $X \times Y$ в теории множеств: элементы такого произведения в нашем смысле — это отображения $f: \{1, 2\} \to X \cup Y$, т.е. подмножества декартова произведения (обычного) $\{1, 2\} \times (X \cup Y)$, а вовсе не элементы $X \times Y$. Однако между "нашими" и "каноническими" произведениями имеется естественное соответствие, которое настолько очевидно, что мы не будем делать разницы между конечными произведениями в этих двух смыслах, а будем отождествлять их. В частности, мы будем использовать обозначения $X_1 \times \ldots \times X_n$, $X \times Y \times Z$ и т.п.

Нужно

В случае, когда все сомножители одинаковы, нет нужды делать между ними искусственное различие, и мы будем писать просто X^A. Таким образом,

$$X^A = \{f : A \to X\}.$$

Это то же самое, что $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, где $X_\alpha = X$ для всех $\alpha\in A$.

Как только задано произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, возникает семейство отображений $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta\in A$; каждое отображение p_β сопоставляет каждой точке $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ её β-ю координату. Эти отображения называются проекциями.

Среди топологий, относительно которых все отображения p_α непрерывны, есть самая слабая топология.*) Она порождена предбазой, состоящей из всех множеств вида $p_{\alpha_0}^{-1}(U)$, где U — открытое множество в X_{α_0} (или элемент какой-нибудь фиксированной предбазы пространства X_{α_0}). Иными словами, элемент предбазы имеет вид $\{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha : x_{\alpha_0} \in U\}$ для фиксир. α_0 и U; здесь α_0 пробегает множество A, а U — всевозможные элементы какой-нибудь предбазы X_{α_0}. Эта топология называется тихоновской топологией, или топологией произведения. В дальнейшем мы будем рассматривать произведения с именно этой топологией. Иногда, особенно если речь идёт о подпространствах пространства X^A, интерпретируемых именно как пространства отображений, и если $X = \mathbb{R}$ или $X \subset \mathbb{R}$, топологию произведения называют топологией поточечной сходимости: последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на A поточечно сходится к функции f, если $\forall \varepsilon > 0, \forall a\in A\ \exists N(a)\in\mathbb{N}$ т., что $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon\ \forall n > N(a)$, т. е. сходится как раз в тихоновской топологии.

На конечных произведениях топология произведения устроена особенно просто — базу топологии произведения $X_1\times\ldots\times X_n$ составляют всевозможные множества вида $U_1\times\ldots\times U_n$, где U_i открыто в (или является элементом базы) X_i для каждого $i = 1,\ldots,n$. Легко видеть, что обычная топология $\mathbb{R}^n$ как раз и есть топология произведения.

Мы начнём с нескольких общих замечаний о тихоновских произведениях.

---

*) Такую топологию можно породить на любом множестве, на котором задано семейство отображений, но только она уже не будет называться тихоновской.

Нужно

Предл. 1 Семейство всех множеств $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где U_α — открытое подмножество пространства X_α и $U_\alpha \neq X_\alpha$ лишь для конечного числа индексов α, образует базу произведения $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$. Более того, если для каждого α фиксирована некоторая база $\mathcal{B}_\alpha$ пространства X_α, то подсемейство, состоящее из тех $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, в которых $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ при $U_\alpha \neq X_\alpha$, также образует базу.

□ Из определения тихоновской топологии вытекает, что семейство всех множеств вида $\bigcap_{i\le k} p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ и каждое U_i открыто в X_{α_i}, является базой пространства $\prod X_\alpha$. Поэтому для доказательства первой части достаточно заметить, что $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где $U_\alpha = X_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha_0$, и что $(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in A} U'_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} (U_\alpha \cap U'_\alpha)$. Вторая часть сразу вытекает из первой. ■

База тихоновского произведения, описанная в первой части предложения 1, называется <u>канонической</u>.

Предл. 2 Если X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \in A$, то топология произведения на $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ совпадает с топологией, индуцированной из $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \supset \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$.

□ Можно считать, что $Y_\alpha \neq \emptyset$ для $\alpha \in A$. Сужения проекций $p_\alpha|_Y$ непрерывны, поэтому индуцированная топология на Y сильнее, чем топология произведения. Любое открытое множество в подпространстве Y пространства $\prod X_\alpha$ есть пересечение Y с объединением семейства элементов канонической базы пространства $\prod X_\alpha$, т.е. объединение пересечений Y с элементами этого семейства. Каждое такое пересечение есть элемент канонической базы произведения $\prod Y_\alpha$, поэтому топология произведения на Y сильнее индуцированной топологии. ■

Предл. 3 Если $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$, то в произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ $\overline{\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha} = \prod_{\alpha\in A} \overline{Y_\alpha}$.

□ Заметим, что $x \in \overline{\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha}$ в том и только том случае, если для каждого элемента $\prod U_\alpha$ канонической базы $\prod X_\alpha$, содержащего x, имеем $\prod U_\alpha \cap \prod Y_\alpha = \prod (U_\alpha \cap Y_\alpha) \neq \emptyset$, т.е. $U_\alpha \cap Y_\alpha \neq \emptyset$ для всех $\alpha \in A$. ■

Зам. Предложение 3 не даёт описания оператора замыкания в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, потому что не все подмножества $\prod X_\alpha$ можно представить в виде $\prod Y_\alpha$, где $Y_\alpha \subset X_\alpha$. Есть много замкнутых множеств в $\prod X_\alpha$, которые не являются произведениями замкнутых множеств в X_α и вообще не являются произведениями. Но если замкнутое множество есть произведение некоторых $Y_\alpha \subset X_\alpha$, то эти Y_α замкнуты.

След. Множество $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, где $Y_\alpha\subset X_\alpha$, всюду плотно в произведении $\prod X_\alpha$ тогда и только тогда, когда Y_α всюду плотно в X_α для каждого α.

Т.1 Произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_i, $i\le 3\frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда $X_\alpha\in T_i$ для всех $\alpha\in A$. Если $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ нормально, то все X_α нормальны.

□ То, что произведение T_i-пространств является T_i-пространством для $i\le 2$, более или менее очевидно (надо взять α_0 такое, что α_0-е координаты двух данных точек отличаются, разделить эти координаты требуемым образом в X_{α_0} и применить $p_{\alpha_0}^{-1}$). Покажем, что произведение T_3-пространств удовлетворяет аксиоме T_3. Пусть $x\in\prod X_\alpha$ и U — любая окрестность x. Возьмём элемент $\prod U_\alpha$ канонической базы, содержащийся в U и содержащий x. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — те координаты, для которых $U_\alpha\ne X_\alpha$. Для каждого $i\le n$ найдём $V_{\alpha_i}\subset X_{\alpha_i}$ такое, что $\overline{V_{\alpha_i}}\subset U_{\alpha_i}$. Для $\alpha\ne\alpha_i$, $i\le n$, положим $V_\alpha=X_\alpha$. Ясно, что $\prod V_\alpha$ — окрестность x и $\prod\overline{V_\alpha}\subset\prod U_\alpha\subset U$. По предложению 3 $\overline{\prod V_\alpha}=\prod\overline{V_\alpha}$, что доказывает выполнение T_3. Выполнение аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$ для произведения $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств доказывается примерно так же: для $x\in\prod X_\alpha$ и её окрестности U найдём $\prod U_\alpha\subset U$, $x\in\prod U_\alpha$, где U_α открыты в X_α и $U_\alpha\ne X_\alpha$ лишь для $\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Для каждого $i=1,\dots,n$ возьмём непрерывную функцию $f_i\colon X_{\alpha_i}\to[0,1]$ такую, что $f_i(x_{\alpha_i})=0$ и $f(X_{\alpha_i}\setminus U_{\alpha_i})\subset\{1\}$ (x_{α_i} — α_i-я координата точки x). Положим $g_i=f_{\alpha_i}\circ p_{\alpha_i}$. Для функции $g=\max\{g_1,\dots,g_n\}$ имеем $g(x)=0$ и $g(\prod X_\alpha\setminus\prod U_\alpha)\subset\{1\}$; кроме того, это непрерывная функция $\prod X_\alpha\to[0,1]$, что и доказывает выполнение $T_{3\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим теперь произведение $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ и предположим, что оно удовлетворяет одной из аксиом T_0–T_4. Будем считать, что все X_α непусты. Выберем по точке $x^*_\alpha\in X_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$ и положим $X^*_{\alpha_0}=\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$, где $Y_\alpha=\{x^*_\alpha\}$ при $\alpha\ne\alpha_0$ и $Y_{\alpha_0}=X_{\alpha_0}$. Очевидно, сужение $i_{\alpha_0}=p_{\alpha_0}|_{X^*_{\alpha_0}}\colon X^*_{\alpha_0}\to X_{\alpha_0}$ — гомеоморфизм. Значит, если $\prod X_\alpha\in T_i$, $i\le 3\frac{1}{2}$, то $X_{\alpha_0}\in T_i$. В случае нормальности $\prod X_\alpha$ заметим, что $X^*_{\alpha_0}$ замкнуто по предложению 3 и потому тоже нормально. ■

Говорят, что топологическое пространство мультипликативно (κ-мультипликативно, конечно мультипликативно, счётно мультипликативно), если любое произведение $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ (с $|A|\le\kappa$, с конечным A, со счётным A) пространств с этим свойством само обладает этим свойством.

Нужно

Мы показали, что свойство удовлетворять аксиомам отделимости $T_0 - T_{3\frac{1}{2}}$ мультипликативно. Однако свойство удовлетворять аксиоме T_4, равно как и нормальность, не мультипликативно: существуют примеры нормальных пространств, квадраты которых не нормальны. Один из таких примеров — "стрелка" Зоргенфрея.

"Стрелка" Зоргенфрея

Так называется пространство $S = [0, 1)$ с топологией, базу которой образуют все полуоткрытые интервалы $[a, b)$, где $a, b \in [0, 1)$, $a < b$. Вещественная прямая с подобной базой топологии (разумеется, в этом случае $a, b \in \mathbb{R}$) называется прямой Зоргенфрея.

Очевидно, "стрелка" является тихоновским пространством. Она сепарабельна (счётное всюду плотное множество составляют рациональные числа). Ясно также, что S удовлетворяет первой аксиоме счётности; однако счетной базы у S нет. Более того, $w(S) = 2^{\aleph_0}$. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ — семейство открытых подмножеств S мощности $< 2^{\aleph_0}$. Существует точка $x_0 \in S$, которая не является точной нижней гранью никакого элемента $\mathcal{F}$. Открытое множество $[x_0, 1)$ нельзя представить в виде объединения подсемейства семейства $\mathcal{F}$; значит, $\mathcal{F}$ не является базой S. Отсюда немедленно вытекает, что S неметризуема (иначе она обладала бы счётной базой, будучи сепарабельной). Однако S нормальна. Покажем это.

Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в S. Для каждого $a \in A$ возьмём интервал $[a, x(a))$, не пересекающийся с B, а для каждого $b \in B$ возьмём интервал $[b, x(b))$, не пересекающийся с A. Полагая $U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a))$ и $V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b))$, мы получим открытые множества такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$. Кроме того, $A \cap B = \varnothing$, иначе нашлись бы пересекающиеся интервалы $[a, x(a))$ и $[b, x(b))$, а это невозможно, потому что тогда либо $a \in [b, x(b))$ (если $a > b$), либо $b \in [a, x(a))$ (если $b > a$).

Итак, "стрелка" — нормальное пространство. Однако пространство $S \times S$ не нормально по тем же причинам, что и плоскость Немыцкого — оно сепарабельно и содержит замкнутое дискретное множество $\{(x, 1-x) : x \in [0, 1)\}$ (см. зам. 1 после теоремы Титце—Урысона).

Следующая теорема очевидна, и мы опускаем её доказательство.

Т.1 Первая и вторая аксиомы счётности счётно мультипликативны.

Следующая теорема далеко не очевидна. Её доказательство довольно сложно и технично, поэтому мы его тоже опускаем.

Т.2 (теорема Хьюитта–Марчевского–Пондицери). Сепарабельность $2^{\aleph_0}$-мультипликативна.*)

Здесь нельзя не упомянуть об одном топологическом свойстве, которое мы до сих пор не рассматривали — это свойство Суслина.

Опр. Для топологического пространства X кардинал
$$c(X) = \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ — семейство непустых открытых попарно непересекающихся подмножеств } X\}$$
называется <u>числом Суслина</u>, или <u>клеточностью</u>, пространства X. Если $c(X) = \aleph_0$, то говорят, что X обладает <u>свойством Суслина</u>.

Т.3 Для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:

① X удовлетворяет второй аксиоме счётности
② X сепарабельно
③ X обладает свойством Суслина

□ Мы уже знаем, что ①⇔②. Очевидно, ②⇒③. Докажем, что ③⇒②.

Выберем какую-нибудь метрику d, порождающую топологию X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмём максимальное (по включению) множество $D_n \subset X$ со свойством $d(x,y) \geq \frac{1}{n}$ $\forall x, y \in D_n$, $x \neq y$ (существование такого множества вытекает из леммы Цорна). Заметим, что объединение $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ всюду плотно в X: если бы существовала точка $x \in X \setminus \overline{D}$, то у этой точки нашлась бы ε-окрестность, не пересекающая D, и для $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ мы бы имели $d(x,y) > \frac{1}{n}$ $\forall y \in D$, что невозможно в силу максимальности множества $D_n \subset D$. Осталось заметить, что все D_n счётны (если $|D_n| > \aleph_0$, то $\{B_d(x, \frac{1}{2n}) : x \in D_n\}$ — несчётное семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств). ■

---

*) Те же Пондицери и Марчевский доказали также, что если все X_α содержат не менее двух точек и $\kappa > 2^{\aleph_0}$, то $\prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ не сепарабельно.

Не нужно

Неметризуемые пространства со свойством Суслина не обязаны быть сепарабельными (пример — $[0,1]^{2^{c}}$: это пространство не сепарабельно (см. примечание на предыдущей странице), но, как мы скоро увидим, обладает свойством Суслина).

Вопрос о мультипликативности свойства Суслина сложен: ответ на него не зависит от ZFC (подобно континуум-гипотезе). Иными словами, существуют модели теории множеств, в которых свойство Суслина мультипликативно, и существуют модели, в которых оно даже не конечно мультипликативно. Например, в предположении $\neg CH$ существует пространство X со свойством Суслина, квадрат которого $X \times X$ этим свойством не обладает. Интересно, что если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ таково, что $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$ обладает свойством Суслина для любого конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset A$, то и всё произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ обладает этим свойством. Действительно, достаточно рассмотреть произвольное несчётное семейство $\mathcal{U}$ непустых открытых множеств в $\prod X_\alpha$, в каждый элемент $U \in \mathcal{U}$ вписать элемент канонической базы V_U, получив тем самым несчётное семейство $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ непустых открытых множеств, вспомнить, что каждое V_U имеет вид $\prod_{\alpha \in A} V_{U_\alpha}$, где множество $F_U = \{\alpha \in A : V_{U_\alpha} \neq X_\alpha\}$ конечно, и применить лемму о Δ-системе (см. конец раздела "Множества") к семейству $\mathcal{F} = \{F_U : U \in \mathcal{U}\}$. Получим несчётное подсемейство $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ такое, что $F_{U_1} \cap F_{U_2} = F \;\; \forall F_{U_1}, F_{U_2} \in \mathcal{F}'$ (здесь F — фиксированное конечное множество, а именно $\bigcap \mathcal{F}'$). Ему соответствует несчётное семейство $\mathcal{V}' = \{V_U : F_U \in \mathcal{F}'\}$, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Осталось заметить, что для $V_{U_1}, V_{U_2} \in \mathcal{V}'$ $V_{U_1} \cap V_{U_2} \neq \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \prod_{\alpha \in F} V_{U_{1\alpha}} \cap \prod_{\alpha \in F} V_{U_{2\alpha}} \neq \varnothing$, поэтому из счётности числа Суслина конечного произведения $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ вытекает существование пересекающихся $V_{U_1}, V_{U_2} \in \mathcal{V}'$. Ясно, что большие множества $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ тем более пересекаются.

Из этих рассуждений мы можем сделать такой вывод:

$\boxed{\text{T.4}}$ Любое произведение сепарабельных пространств обладает свойством Суслина.

Нужно (кроме последнего замечания)

Обсудим теперь отображения топологических пространств в произведения.

<u>Предл. 4</u> Отображение f топологического пространства X в произведение $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $p_\alpha\circ f$ непрерывна для каждого $\alpha\in A$.

□ $\Rightarrow$ Очевидно

$\Leftarrow$ Рассмотрим предбазу $\{p_\alpha^{-1}(U) : U$ открыто в $Y_\alpha\}$ топологии произведения. Для каждого $\alpha\in A$ имеем $f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U)) = (p_\alpha\circ f)^{-1}(U)$, а это множество открыто в силу непрерывности $p_\alpha\circ f$. Открытость прообразов элементов предбазы влечёт непрерывность. ■

<u>Опр.</u> Пусть заданы топологические пространства $X_\alpha, \alpha\in A$, и $Y_\alpha, \alpha\in A$, а также семейство отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha, \alpha\in A$. В силу предл. 4 отображение

$$f: \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \quad f: (x_\alpha)_{\alpha\in A} \longmapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A},$$

непрерывно. Оно называется <u>декартовым произведением</u> отображений $f_\alpha, \alpha\in A$, и обозначается $\prod_{\alpha\in A} f_\alpha$ или $f_1\times\ldots\times f_n$, если $A=\{1,\ldots,n\}$.

<u>Зам.</u> Для $X'_\alpha\subset X_\alpha$ и $Y'_\alpha\subset Y_\alpha$ имеем

$$\Big(\prod_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)\Big(\prod_{\alpha\in A} X'_\alpha\Big) = \prod_{\alpha\in A} f_\alpha(X'_\alpha) \quad \text{и} \quad \Big(\prod_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)^{-1}\Big(\prod_{\alpha\in A} Y'_\alpha\Big) = \prod_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

<u>Опр.</u> Пусть заданы топологические пространства X и $Y_\alpha, \alpha\in A$, и семейство отображений $f_\alpha: X\to Y_\alpha, \alpha\in A$. В силу предл. 4

$$f: X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \quad f: x \longmapsto (f_\alpha(x))_{\alpha\in A},$$

непрерывно. Оно называется <u>диагональю</u> семейства $\{f_\alpha : \alpha\in A\}$, или <u>диагональным отображением</u>, или <u>диагональным произведением</u> и обозначается $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ или $f_1\Delta\ldots\Delta f_n$, если $A=\{1,\ldots,n\}$.

<u>Зам.</u> Для $X'\subset X$ и $Y'_\alpha\subset Y_\alpha$ имеем

$$\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(X') \subset \prod_{\alpha\in A} f_\alpha(X') \quad \text{и} \quad \Big(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)^{-1}\Big(\prod_{\alpha\in A} Y'_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

<u>Зам.</u> Диагональ $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ есть композиция диагонали $i = \Delta_{\alpha\in A} \mathrm{id}_{X_\alpha} : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, где $X_\alpha = X$ для $\alpha\in A$, и произведения $\prod_{\alpha\in A} f_\alpha : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Образ $\Delta = i(A) \subset X^k = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, где $k=|A|$, называется <u>диагональю</u> произведения X^k. Из леммы о замкнутости множества точек совпадения двух непрерывных отображений хаусдорфовых пространств следует, что для $X\in T_2$ диагональ $\Delta = \bigcap_{\alpha,\beta\in A} \{x\in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha : p_\alpha(x) = p_\beta(x)\}$ замкнута в X^k.

Нужно

Теперь рассмотрим вложения топологических пространств в декартовы произведения. Пусть X — топологическое пространство, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство отображений. Говорят, что $\mathcal{F}$ <u>разделяет точки</u>, если для каждой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует такое отображение $f_\alpha \in \mathcal{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Если для каждой точки $x \in X$ и каждого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего x, существует такое отображение $f_\alpha \in \mathcal{F}$, что $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ <u>разделяет точки и замкнутые множества</u>. Заметим, что если X — T_0-пространство, то каждое семейство $\mathcal{F}$, разделяющее точки и замкнутые множества, разделяет и точки.

<u>Лемма</u> Если отображение $f: X \to Y$ инъективно и одноэлементное семейство $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.

□ Достаточно показать, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$ имеем

$$f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)} \qquad (*)$$

Если $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. Следовательно, правая часть $(*)$ содержится в левой части.
■ Обратное включение очевидно.

$\boxed{\text{Т.4}}$ (о диагональном отображении). Если семейство $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки, то диагональное отображение $f = \underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ инъективно. Если, сверх того, семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.

В частности, если существует $\alpha \in A$, для которого f_α — гомеоморфное вложение, то f — гомеоморфное вложение.

□ Если семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y \in Y$ существует такое $f_\alpha \in \mathcal{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Таким образом, $f(x) \neq f(y)$, а это и означает, что f инъективно.

Если семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ тоже обладает этим свойством, так как если $f(x) \in \overline{f(F)}$ для некоторого $F = \overline{F} \subset X$, то $f_\alpha(x) = p_\alpha(f(x)) \in p_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{p_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$ для каждого $\alpha \in A$.
■ Осталось воспользоваться леммой.

Не нужно

След. 1 | Если $X_\alpha = X$ для каждого $\alpha \in A$, то диагональное отобр-е $i = \Delta\, id_{X_\alpha} : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — гомеоморфное вложение. Следовательно, диагональ произведения X^κ гомеоморфна X.

Графиком отображения $f: X \to Y$ называется множество
$$Gr(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

След 2 | Для каждого непрерывного отображения $f: X \to Y$ график $Gr(f)$ есть образ пространства X при гомеоморфном вложении $id_X \Delta f: X \to X \times Y$. Сужение $p|_{Gr(f)}$ проекции $p: X \times Y \to X$ — гомеоморфизм. Если $X \in T_2$, то $Gr(f)$ — замкнутое подмножество пространства $X \times Y$.

□ Первое утверждение очевидно. Второе вытекает из того, что сужение $p|_{Gr(f)}$ есть обратное отображение к гомеоморфизму $(id_X \Delta f)|_X$. Третье утверждение вытекает из равенства $Gr(f) = (f \times id_Y)^{-1}(\Delta)$, где Δ — диагональ пространства $Y \times Y$, и замкнутости Δ в $Y \times Y$. ■

Пример Канторово множество — классический пример совершенного (т.е. замкнутого и без изолированных точек) нигде не плотного подмножества прямой. Обозначается C. Получается по индукции удалением средних третей (без концов) из всех имеющихся отрезков, начиная с $[0,1]$, т.е. есть пересечение счётного числа замкнутых подмножеств отрезка и потому компактно. Каждое $x \in C$ можно представить в виде троичной записи, не содержащей 1 (причём именно такая троичная запись у $x \in C$ единственна, хотя, например, записи $0{,}1$ и $0{,}0(2)$ представляют одно и то же число). Значит, отображение $f: C \to D^{\aleph_0}$, определённое правилом $f(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$, $x_n \in D = \{0,1\}$, инъективно (и сюръективно). Оно непрерывно в силу предл. 4. Всякая непрерывная биекция компакта в хаусдорфово пространство — гомеоморфизм; значит, C гомеоморфно $D^{\aleph_0}$.

Пример Пространство $D^{\aleph_1}$ содержит дискретное несчётное подпространство $A_{\aleph_1}$ с единственной предельной точкой ξ, окрестностями которой в $A^*_{\aleph_1} = A_{\aleph_1} \cup \{\xi\}$ служат все дополнения до конечных множеств (такое пространство $A^*_{\aleph_1}$ иногда называют суперпоследовательностью Александрова; в данном случае в качестве $A_{\aleph_1}$ можно взять мн-во точек с ровно одной ненулевой координатой, а в качестве ξ — точку с нулевыми к-ми). $A^*_{\aleph_1}$ — компакт. Ясно, что он не уд-ет второй и даже первой аксиоме счётности. Любое непустое неодноточечное T_1-пространство содержит двухточечное дискретное подпространство D; значит несчётная степень такого пространства содержит $A^*_{\aleph_1}$ и потому не может иметь счётный вес или характер.