Нужно (вписанность понадобится потом)

$\mathscr{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — любое множество и $C_\alpha \subset X$ для всякого $\alpha \in A$,

Компакты

Полезное замечание: $\mathscr{C}$ — покрытие $Y \Leftrightarrow \bigcap\{Y \setminus C : C \in \mathscr{C}\} = \varnothing$

<u>Покрытие</u> множества $Y \subset X$ — это любое семейство ~~$\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$~~, которое <u>покрывает</u> Y, т.е. такое, что $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$. Как правило, мы будем рассматривать ситуации, в которых $Y = X$. Если покрытие состоит из, например, открытых множеств, то его коротко называют <u>открытым покрытием</u>. Семейство $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется <u>подпокрытием</u> покрытия $\mathscr{C}$ множества Y, если $\bigcup \mathscr{C}' \supset Y$ (т.е. $\mathscr{C}'$ тоже является покрытием Y). Подпокрытие — это частный случай вписанного покрытия: говорят, что покрытие $\mathscr{C}'$ <u>вписано</u> в покрытие $\mathscr{C}$, и пишут $\mathscr{C}' \leq \mathscr{C}$ или $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$ (хотя вписанность, строго говоря, не является отношением порядка — не хватает антисимметричности; тем не менее, рефлексивность и транзитивность присутствуют, так что это предпорядок и даже направление), если $\forall C' \in \mathscr{C}'$ $\exists C \in \mathscr{C}$ т., что $C' \subset C$. Иными словами, вписанное покрытие в некотором смысле мельче исходного.

Опр. 1 Топологическое пространство <u>компактно</u>*), если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются <u>компактами</u>.

$\Updownarrow$

Опр. 1′ Топологическое пространство <u>компактно</u>, если любое центрированное**) семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

<u>Зам.</u> Эти определения равносильны — достаточно рассмотреть открытое покрытие, образованное дополнениями элементов семейства замкнутых множеств с пустым пересечением.

<u>Зам.</u> Пример нехаусдорфова компактного T_1-пространства — прямая с топологией Зариского.

Компакты замечательны в самых разных отношениях. По своим свойствам они во многом похожи на конечные пространства.

Т.1 Компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.

□ Сперва заметим, что топологическое пространство хаусдорфово тогда и только тогда, когда пересечение замыканий всех окрестностей любой точки в нём есть сама эта точка (точнее, состоящее из неё одноточечное множество).

---

*) В отечественной литературе до определённого времени использовались термины "бикомпактный" и "бикомпакт" вместо "компактный" и "компакт", а компактами назывались метризуемые бикомпакты.

**) Семейство множеств <u>центрировано</u>, если любое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Нужно

Теперь предположим, что K — компакт в хаусдорфовом пространстве X и $x \in \overline{K} \setminus K$. Тогда семейство
$$\mathcal{C} = \{X \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность } x\}$$
представляет собой собой открытое покрытие K, потому что $\bigcap\{\overline{U} : U \text{ — окрестность } x\} = \{x\}$ и $x \notin K$. Если бы из этого покрытия можно было выделить конечное подпокрытие $X \setminus \overline{U}_1, \ldots, X \setminus \overline{U}_n$, то множество $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ было бы окрестностью точки x, не пересекающей K, в противоречие с условием $x \in \overline{K}$. ▨

Следующие два утверждения очевидны, но очень важны.

Т.2 Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.

□ Пусть K — компактное пространство и X — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathcal{C}$ пространства X. По определению индуцированной топологии для каждого $U \in \mathcal{C}$ существует открытое в K множество V_U, для которого $U = V_U \cap X$. Осталось заметить, что семейство $\{K \setminus X\} \cup \{V_U : U \in \mathcal{C}\}$ образует открытое покрытие K, а значит, из него можно выделить конечное подпокрытие. ▨

Т.3 Всякий непрерывный образ*) компактного пространства компактен.

□ Пусть K — компактное пространство и $f: K \to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathcal{C}$ пространства X. Если оно не содержит конечных подпокрытий, то, очевидно, $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{C}\}$ — открытое покрытие K, которое не содержит конечных подпокрытий. Противоречие. ▨

След. Любая непрерывная биекция из компакта в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом. Иными словами, если $(K, \mathcal{T})$ — компакт, то любая хаусдорфова топология на K, более слабая, чем $\mathcal{T}$, совпадает с $\mathcal{T}$.

□ Пусть $f: K \to X$ — непрерывная биекция, $X \in T_2$. Для любого замкнутого $Y \subset K$ $f(K)$ — компакт и потому замкнуто в X, т.е. образ при f любого замкнутого множества замкнут, а это означает, что f^{-1} непрерывно. ▨

*) т.е. образ при непрерывном отображении. Вместо "образ при таком-то отображении" часто говорят просто "такой-то образ".

Лемма | Всякий компакт регулярен. Более того, в любом хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности.

□ Пусть $X \in T_2$, $K \subset X$, K — компакт, и пусть $x \in X \setminus K$. Для каждой точки $y \in K$ зафиксируем открытые непересекающиеся $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Открытое покрытие $\{U_y : y \in K\}$ множества K содержит конечное подпокрытие $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$. Ясно, что $\bigcup_{i \le n} U_{y_i}$ — открытая окрестность K, $\bigcap_{i \le n} V_{y_i}$ — открытая окрестность x и $\left(\bigcup_{i \le n} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i \le n} V_{y_i}\right) = \varnothing$.

Мы показали, что в хаусдорфовом пространстве любая точка и любое не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности. В силу теоремы 2 отсюда вытекает регулярность всякого компакта. ■

Т.4 | Всякий компакт нормален.

□ Мы уже знаем, что всякий компакт регулярен, поэтому (и в силу теоремы 2) достаточно проверить, что если $X \in T_3$, $K \subset X$, K — компактное множество, $F \subset X$, F замкнуто и $F \cap K = \varnothing$, то найдутся непересекающиеся открытые множества $U \supset K$ и $V \supset F$. Это действительно так: для каждой точки $y \in K$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_y \ni y$ и $V_y \supset F$ (это возможно, поскольку $X \in T_3$). Из открытого покрытия $\{U_y : y \in K\}$ компакта K выделим конечное подпокрытие $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$. Осталось положить $U = \bigcup_{i \le n} U_{y_i}$ и $V = \bigcap_{i \le n} V_{y_i}$. ■

Зам. Мы сформулировали теорему 4 в традиционном виде, но тоже могли бы добавить „более того":

Утв. | В любом регулярном пространстве любые два непересекающихся мн-ва, из которых замкнуто, а другое компактно, имеют непересекающиеся окрестности.

Теорема Титце–Урысона тоже имеет свою версию для компактов. Эта версия вытекает, например, из доказанной ниже теоремы Стоуна-Вейерштрасса (и является также непосредственным следствием теоремы Тихонова о вложении любого тихоновского пространства в тихоновское произведение отрезков, которую мы докажем позже).

Нужно

Прежде чем формулировать и доказывать теорему Стоуна–Вейерштрасса, мы приведём ещё три простые, но важные теоремы.

Т.5 Любое бесконечное множество в компакте имеет предельную точку.

□ Пусть A — любое множество без предельных точек в компакте. Поскольку множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, имеем $\overline{A} = A$. С другой стороны, $\overline{A}$ состоит из всех точек прикосновения, а они делятся на предельные и изолированные; значит, все точки A изолированы, т.е. A — замкнутое дискретное пространство (в топологии подпространства), и одноточечные подмножества образуют его открытое покрытие. По теореме 2 A компактно, поэтому оно не может быть бесконечным. ■

Т.6 (Бэра) (Теорема Бэра о категориях) В любом компакте X пересечение $G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$ любой последовательности $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

□ Возьмём любое непустое открытое множество $U \subset X$. Поскольку G_1 открыто и плотно, найдётся непустое открытое множество U_1 такое, что $\overline{U_1} \subset U \cap G_1$ (достаточно взять любую точку $x \in U \cap G_1$, заметить, что $U \cap G_1$ — открытая окрестность этой точки и воспользоваться регулярностью компакта X). Точно так же найдём непустое открытое U_2 такое, что $\overline{U_2} \subset U_1 \cap G_2$ и т.д. Получим последовательность $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Семейство $\mathcal{F} = \{\overline{U_n} : n \in \mathbb{N}\}$ центрировано, поскольку $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$ и все U_n непусты. Значит, $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \varnothing$ (см. альтернативное определение компактности). Из произвольности выбора U и того, что $\bigcap \mathcal{F} \subset G$, вытекает требуемое утверждение. ■

В литературе чаще используется теорема Бэра в двойственной формулировке, в терминах нигде не плотных множеств. Множество A в топологическом пространстве X <u>нигде не плотно</u>, если оно не плотно ни в каком открытом $U \subset X$, т.е. любое непустое открытое множество содержит непустое открытое множество, не пересекающееся с A. Ясно, что A нигде не плотно тогда и только тогда, когда $X \setminus \overline{A}$ (открыто и) всюду плотно.
В классификации Бэра топологических пространств (и их подмножеств) на "большие" и "маленькие", точнее, "тучные" и "тощие", множества <u>первой категории (meagre*)</u> — это в точности те, которые

*) meagre — тощий (англ.)

можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств, а множества второй категории — это все прочие множества.

Т.6′ (Бэра) (Теорема Бэра о категориях) В любом компакте X дополнение до объединения счётной последовательности нигде не плотных множеств всюду плотно.

<u>Следствие</u> (одна из стандартных формулировок теоремы Бэра о категориях) Всякий компакт является пространством второй категории.

Т.7 Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.

□ Действительно, если X компактно и $f: X \to \mathbb{R}$ — неограниченная функция (т.е. $\sup\limits_{x\in X}|f(x)| = \infty$), то $\{f^{-1}(-n, n): n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. ▨

<u>Теорема Стоуна—Вейерштрасса</u>

Теорема Стоуна—Вейерштрасса позволяет аппроксимировать непрерывные функции на компакте, например, многочленами, причём аппроксимировать в сильном смысле (равномерной сходимости). Для этой теоремы нам понадобится ещё одно определение и две леммы, первая из которых хорошо известна из анализа и потому приводится без доказательства.

<u>Опр.</u> Пусть X — топологическое пространство и $C_b(X)$*) — множество всех непрерывных ограниченных функций на X. Формула $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$ определяет норму на $C_b(X)$, которая называется <u>sup-нормой</u>. Топология, порождённая этой нормой (т.е. определяемой ею метрикой $d: (f,g) \mapsto \|f-g\|$) называется <u>топологией равномерной сходимости</u>. Последовательность функций, которая сходится в этой топологии, называется <u>равномерно сходящейся</u> (на X).

Очевидно, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывных ограниченных функций на X сходится к f в топологии равномерной сходимости, т.е. равномерно сходится к f, тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n > N\ \forall x \in X$ (здесь важно, что N не зависит от x!).

*) Заметим, что для компактного X $C_b(X) = C(X)$ ($C(X)$ — это мн-во всех непр. ф-й на X)

Нужно

Лемма 1 Существует последовательность многочленов $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, равномерно сходящаяся к функции $\sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$.

Такие многочлены можно определить, например, рекуррентными формулами $p_1(x)=0$ и $p_{n+1}(x)=p_n(x)+\frac{1}{2}(x-p_n^2(x))$, $n=1,2,\ldots$, $x\in[0,1]$.

Лемма 2 Пусть R — некоторое кольцо*) непрерывных ограниченных вещественных функций на топологическом пространстве X. Если кольцо R содержит все постоянные функции и замкнуто в топологии равномерной сходимости, то для всех $f,g\in R$ функции $\max(f,g)$ и $\min(f,g)$ тоже принадлежат R.

□ Поскольку $\min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ и $\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, достаточно показать, что если $f\in R$, то $|f|\in R$. Возьмём любое $f\in R$ и $c>0$ такое, что $|f(x)|\le c$ $\forall x\in X$ (такое c существует в силу ограниченности всех функций из R). Имеем $|\frac{1}{c}f(x)|\le 1$ $\forall x\in X$ и $|\frac{1}{c}f|=\frac{1}{c}|f|\in R \Leftrightarrow |f|\in R$, потому что R содержит все постоянные функции и замкнуто относительно умножения. Итак, достаточно проверить, что если $f\in R$ и $|f(x)|\le 1$ $\forall x\in X$, то $|f|\in R$. По лемме 1 функция $|f|=\sqrt{f^2}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из R, а именно, $f_n(x)=p_n((f(x))^2)$. ■

$\boxed{\text{Т.8}}$ С-В (Стоуна–Вейерштрасса) Если кольцо R непрерывных функций на компакте X содержит все постоянные функции, разделяет точки (т.е. $\forall x,y\in X, x\ne y, \exists f\in R: f(x)\ne f(y)$) и замкнуто в $C_b(X)$ относительно топологии равномерной сходимости, то $R=C_b(X)$. (Иными словами, к любой функции из $C_b(X)$ равномерно сходится последовательность функций из R.)

□ Возьмём $f\in C_b(X)$. Надо показать, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists f_\varepsilon\in R$ такое, что $|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in X$.

Для каждой пары точек $a,b\in X, a\ne b$, возьмём $h_{a,b}\in R$ т.ч. $h_{a,b}(a)\ne h_{a,b}(b)$. Положим $g_{a,b}(x)=(h_{a,b}(x)-h(a))(h_{a,b}(b)-h_{a,b}(a))^{-1}$ $\forall x\in X$. Имеем $g_{a,b}\in R$ и $g_{a,b}(a)=0$, $g_{a,b}(b)=1$. Положим $f_{a,b}(x)=(f(b)-f(a))g_{a,b}(x)+f(a)$; имеем $f_{a,b}\in R$ и $f_{a,b}(a)=f(a)$, $f_{a,b}(b)=f(b)$.

Множества $U_{a,b}=\{x: f_{a,b}(x)<f(x)+\varepsilon\}$ и $V_{a,b}=\{x: f_{a,b}(x)>f(x)-\varepsilon\}$ — окрестности точек a и b соответственно. Зафиксируем точку b и возьмём конечное подпокрытие $\{U_{a_i,b}\}_{i=1}^k$ открытого покрытия $\{U_{a,b}\}_{a\in X}$ компакта X. В силу леммы 2 функция $f_b=\min\{f_{a_i,b}\}_{i=1}^k$ принадлежит R; очевидно, $f_b(x)<f(x)+\varepsilon$ при $x\in X$ и $f_b(x)>f(x)-\varepsilon$ при $x\in V_b=\bigcap_{i\le k}V_{a_i,b}$. Возьмём конечное подпокрытие $\{V_{b_i}\}_{i=1}^n$ открытого покрытия $\{V_b\}_{b\in X}$ компакта X. Функция $f_\varepsilon=\max\{f_{b_1},\ldots,f_{b_n}\}\in R$ — искомая. ■

*) т.е. подмножество $C_b(X)$, замкнутое относительно обычных операций поточечного сложения ($(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\forall x\in X$), поточечного умножения ($(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$) и взятия противоположного элемента ($(-f)(x)=-f(x)$).

Не нужно

Из теоремы Стоуна — Вейерштрасса без труда выводится возможность продолжения непрерывных функций, определенных на компактных подмножествах тихоновских пространств.*)

T. 9 (следствие теоремы Стоуна–Вейерштрасса). Пусть X — тихоновское пространство и K — его компактное подпространство. Тогда для любой непрерывной функции $f: K \to \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\hat{f}: X \to \mathbb{R}$ такая, что $\hat{f}|_K = f$.

□ Положим $R = \{ f|_K : f \in C_b(X) \}$. Ясно, что R состоит из непрерывных функций $K \to \mathbb{R}$, является кольцом, содержит все константы и разделяет точки компакта K (потому что $C_b(X)$ разделяет точки X, поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$ и $X \in T_2$). Если мы покажем, что R замкнуто в топологии равномерной сходимости, то тем самым мы докажем, что $R = C_b(K)$, т.е. все непрерывные функции на K (они автоматически ограничены) есть сужения непрерывных функций на X, иными словами, продолжаются на X.

Итак, пусть $g \in \overline{R}$ (в топологии равномерной сходимости на K), и пусть $g_n \in R$, $g_n \rightrightarrows g$ $(n \in \mathbb{N})$. Для каждого n найдем $f_n \in C_b(X)$ т., что $f_n|_K = g_n$. Поскольку K – компакт, функция g ограничена,**) поэтому все g_n начиная с некоторого номера N тоже ограничены (в силу равномерной сходимости), скажем, числом C. Без ограничения общности можно считать, что $N = 1$ и $C = 1$. Можно также считать, что все f_n тоже ограничены единицей (иначе заменим f_n на $\max(\min(f_n, \mathbb{1}), -\mathbb{1})$, где $\mathbb{1} \in C_b(X)$, $\mathbb{1} \equiv 1$). Наконец, можно считать, что $|g_{n+1}(x) - g_n| < \frac{1}{2^n}$ $\forall x \in K$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $r_n : \mathbb{R} \to [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ правилом

$$r_n(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{1}{2^n} \le x \le \frac{1}{2^n}, \\ -\frac{1}{2^n}, & \text{если } x < -\frac{1}{2^n}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{если } x > \frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Очевидно, последовательность $f_1 + \sum_{k=1}^{n} r_k(f_{k+1} - f_k)$ равномерно сходится на X, и её предел f (который, как известно из анализа, есть непрерывная функция) совпадает с g на K.

▨ Очевидно, f ограничена, т.е. $f \in C_b(X)$.

---

*) Гораздо проще теорема 9 доказывается с помощью теорем Тихонова, и здесь её доказательство приводится лишь для иллюстрации применения теоремы Стоуна-Вейерштрасса; в частности, с помощью стоун-чеховской компактификации из неё можно вывести теорему Титце — Урысона.

**) т.е. $\exists C \in \mathbb{R} : |g(x)| < C$ $\forall x \in K$.