Нужно

Лемма Урысона

Т.5 (Лемма Урысона) Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в нормальном*) пространстве X существует непрерывная функция $f: X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \in B$.

☐ Сперва мы построим семейство открытых множеств V_r, $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условиям

(1) $\overline{V_r} \subset V_{r'}$, если $r < r'$;

(2) $A \subset V_0$ и $B \subset X \setminus V_1$.

Будем строить V_r по индукции. Положим $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ и как-нибудь перенумеруем все рациональные числа в $(0,1)$: $r_3, r_4, \dots$. Пользуясь нормальностью X, найдём открытые множества U и V такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Положим $V_0 = U$ и $V_1 = X \setminus B$. Очевидно, имеем $A \subset V_0 \subset X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subset V_1$; следовательно, $\overline{V_0} \subset V_1$, т.е. условие

(1_k) $\overline{V_{r_i}} \subset V_{r_j}$, если $r_i < r_j$ и $i, j \le k$

выполнено для $k = 2$. (Условие (2) выполнено по построению)

Допустим, что множества V_{r_j} уже определены для $j \le n$, где $n \ge 2$, и выполнено условие (1_n). Обозначим через r_ℓ и r_m те из чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$, которые ближе всего к r_{n+1} слева и справа соответственно. Поскольку $r_\ell < r_m$, из (1_n) вытекает, что $\overline{V_{r_\ell}} \subset V_{r_m}$. Из нормальности X вытекает существование открытых множеств U и V таких, что $\overline{V_{r_\ell}} \subset U$, $X \setminus V_{r_m} \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Отсюда следует, что $U \subset X \setminus V \subset V_{r_m}$, а это, в свою очередь, даёт $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset V_{r_m}$. Положив $V_{r_{n+1}} = U$, мы получим множества $V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_{n+1}}$, удовлетворяющие условию (1_{n+1}). Полученная в результате последовательность $V_{r_1}, V_{r_2}, \dots$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Определим функцию $f: X \to [0,1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\} & \text{для } x \in V_1, \\ 1 & \text{для } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

В силу (2) имеем $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$. Проверим непрерывность. По утв. 2 достаточно проверить, что $f^{-1}([0,a))$ и $f^{-1}((b,1])$ открыты для всех $a, b \in [0,1]$.

$f(x) < a \iff \exists r < a : x \in V_r$; значит, $f^{-1}([0,a)) = \cup\{V_r : r < a\}$ (открыто).

$f(x) > b \iff \exists r' > b : x \notin V_{r'}$. Поскольку $\exists r : b < r < b'$, в силу (1) имеем $f(x) > b \Rightarrow \exists r > b : x \notin \overline{V_r}$ (так как $\overline{V_r} \subset V_{r'}$). Очевидно, верно и обратное: если $x \notin \overline{V_r}$ для некоторого $r > b$, то $x \notin V_r$ и $f(x) \ge r > b$.

▨ Значит, $f^{-1}((b,1]) = \cup\{X \setminus \overline{V_r} : r > b\}$ открыто.

*) Теорема верна и для T_4-пространств, но по традиции её формулируют для нормальных.

Нужно

Теорема Титце – Урысона

T.6 Каждая непрерывная функция, заданная на замкнутом подпространстве F нормального*) пространства X и принимающая значения в $[0,1]$ или $\mathbb{R}$, непрерывно продолжается на X.

□ Сначала докажем теорему для функций $f: F \to [-1,1]$ (для удобства).

Заметим, что для любой непрерывной функции $f_0: F \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $|f_0(x)| \le a \ \forall x \in F$, существует непрерывная $g: X \to \mathbb{R}$ такая, что

(1) $|g(x)| \le a/3$ для $x \in X$

(2) $|f_0(x) - g(x)| \le 2a/3$ для $x \in F$.

В самом деле, множества $A = f_0^{-1}([-a,-a/3])$ и $B = f_0^{-1}([a/3,a])$ замкнуты (и не пересекаются) в F; значит, они замкнуты и в X, и в силу леммы Урысона существует непрерывная $\varphi: X \to [0,1]$ такая, что $\varphi(A) \subset \{0\}$ и $\varphi(B) \subset \{1\}$. Полагая $g(x) = \frac{2}{3}a(\varphi(x) - \frac{1}{2})$, получим непр. $g: X \to \mathbb{R}$, удовл. (1) и (2).

Определим теперь по индукции последовательность непрерывных функций $g_n: X \to \mathbb{R}$ таких, что

(3) $|g_n(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ для $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$,

(4) $\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ для $x \in F$, $n \in \mathbb{N}$.

Чтобы получить g_1, мы применим сделанное выше замечание к $f_0 = i_{[-1,1]} \circ f$ и $a = 1$, где $i_{[-1,1]}$ — вложение $[-1,1]$ в $\mathbb{R}$. Допустим, что $g_1, g_2, \dots, g_n$ построены. Применяя то же самое замечание к $f_0 = i_{[-1,1]} \circ f - \left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)\big|_F$ и $a = (2/3)^k$, получим функцию g_{n+1}, удовлетворяющую условиям (3) и (4) для $n+1$.

Можно проверить, что формула $\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ определяет непрерывную функцию (это следует из (3)) $X \to [-1,1]$, и согласно (4) $\hat{f}(x) = f(x)$ для $x \in F$. Значит, $\hat{f}$ — продолжение f на F.

Мы доказали первую часть теоремы для $f: F \to [-1,1]$ вместо $f: F \to [0,1]$, но тем самым мы доказали её и для любого $[a,b]$, $a<b$: Надо рассмотреть $\psi \circ f$ вместо f, а потом $\psi^{-1} \circ \hat{f}$ вместо $\hat{f}$ (где $\psi: [a,b] \to [-1,1]$, $\psi(x) = \frac{a+b-2x}{a-b}$, $\psi^{-1}(x) = \frac{(b-a)x+a+b}{2}$)

Теперь рассмотрим $f: F \to \mathbb{R}$. В силу уже доказанной части теоремы функция $\psi \circ f: F \to [-1,1]$, где $\psi: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\psi(x) = \frac{x}{1+|x|}$, продолжается на X до функции $\hat{f}_1: X \to [-1,1]$. Очевидно, множество $G = \hat{f}_1^{-1}(\{-1,1\})$ замкнуто в X и не пересекает F. Значит, существует непрерывное $\varphi: X \to [0,1]$ такое, что $\varphi(G) \subset \{0\}$ и $\varphi(F) \subset \{1\}$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_2: X \to [-1,1]$, определённое формулой $\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x) \cdot \varphi(x)$, также является продолжением отображения $\psi \circ f$ на X и что $\hat{f}_2(X) \subset \psi(\mathbb{R})$. Функция $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \hat{f}_2$ является искомым продолжением f на X. ■

Теорема 6 даёт простое доказательство ненормальности плоскости Немыцкого, которое использует также следующее простое, но важное утверждение.

*) Теорема верна и для T_4-пространств.

Нужно

Т.7 Если непрерывное отображение f плотного подмножества A некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y непрерывно продолжается на X, то продолжение однозначно определяется отображением f.

Лемма Пусть f, g — непрерывного отображения некоторого пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ замкнуто в X.

□ леммы Мы покажем, что множество $A=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}$ открыто в X. Для каждого $x\in A$ имеем $f(x)\neq g(x)$; следовательно, в Y существуют открытые множества U и V такие, что $f(x)\in U$, $g(x)\in V$ и $U\cap V=\varnothing$. Множество $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)$ — окрестность точки x, содержащаяся в A.

■ леммы

□ теоремы 7 Пусть $\hat{f}_1: X\to Y$ и $\hat{f}_2: X\to Y$ — различные продолжения f. В силу леммы множество $B=\{x\in X: \hat{f}_1(x)=\hat{f}_2(x)\}$ замкнуто. Поскольку $A\subset B$, имеем $X=\bar{A}=B$, так что $B=X$. ■ теоремы 7

Как мы знаем, плоскость Немыцкого L содержит замкнутое дискретное подпространство ℓ (граничную прямую) мощности $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, а также счетное плотное множество D точек с рациональными координатами. Из теоремы 7 вытекает, что каждая непрерывная функция $L\to\mathbb{R}$ определяется своим сужением на D. Значит, на L существует только $\mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$ непрерывных функций. Если бы L была нормальным пространством, то каждая из $2^{\mathfrak{c}}$ (непрерывных) функций, определённых на дискретном подпространстве ℓ, могла бы быть продолжена на L, что невозможно, поскольку $2^{\mathfrak{c}}>\mathfrak{c}$ по теореме Кантора.

Зам. 1 Это же рассуждение доказывает, что никакое сепарабельное пространство, содержащее замкнутое дискретное подпространство мощности $\mathfrak{c}$, не нормально.

Зам. 2 На самом деле теорема Титце-Урысона характеризует нормальные (точнее, T_4) пространства, поскольку если топологическое пространство таково, что любая непрерывная функция, определённая на любом замкнутом подмножестве этого пространства, продолжается на всё пространство, то это пространство, очевидно, уд-ет аксиоме T_4: для непересекающихся замкнутых множеств A и B достаточно рассмотреть непрерывную функцию f на замкнутом подпространстве $A\cup B$,

Нужно

$f|_A \equiv 0$, $f_B \equiv 1$, и продолжить её на всё пространство; открытые множества $f^{-1}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ и $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}))$ отделяют A и B.

Возникает естественный вопрос: а нельзя ли подобным образом охарактеризовать T_3-пространства? Иными словами, верно ли, что если X — T_3- (или даже регулярное) пространство, $x\in X$ и F — замкнутое множество, $x \notin F$, то $\exists$ непрерывная ф-я $f: X \to [0,1]$ т., что $f(x)=0$ и $f|_F \equiv 1$? (Обратное, очевидно, верно из тех же соображений, что и в случае T_4.) Оказывается, что не так, хотя пример построить непросто. Однако само свойство оказалось настолько полезным и распространённым (им обладают почти все топологические пространства, возникающие естественным образом, в частности, все метризуемые, равномерные и функциональные пр-ва, пр-ва с топологией линейного порядка, топологические многообразия и группы, CW-комплексы и пр.), что пришлось ввести дополнительную аксиому отделимости — между T_3 и T_4.

<u>Опр.</u> Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества и точки вне его существует непрерывная функция, равная 1 на множестве и 0 в точке.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются <u>вполне регулярными</u>, или <u>тихоновскими</u>.

(Иногда за определение принимают равносильное условие: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, если $\forall x \in X$ и $\forall$ откр. $U \ni x$ $\exists$ непр. $f: X \to [0,1]$ т., что $f(x)=0$, $f|_{X\setminus U} \equiv 1$.)

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с тихоновскими пространствами. Класс этих пространств намного шире класса нормальных пространств. Один пример тихоновского ненормального пространства у нас уже есть — это плоскость Немыцкого. Действительно, для любой точки $x \in \ell$ и любой её окрестности U возьмём базисную окрестность $D_x \cup \{x\} \subset U$ (ℓ — граничная прямая, D_x — открытый круг, касающийся ℓ в точке x). Для $y \in D_x$ пусть y' — точка, в которой луч, выходящий из x и проходящий через y, пересекает границу D_x. Легко видеть, что функция

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = x \\ 1 & \text{при } y \in L \setminus (D_x \cup \{x\}) \\ |[x,y]| / |[x,y']| & \text{при } y \in D_x \end{cases}$$

непрерывна (и, по определению, $f(x) = 0$ и $f|_{L\setminus U} \equiv 1$, так как $U \supset D_x \cup \{x\}$). Существование нужных функций для точек $x \in L \setminus \ell$ и их окрестностей вытекает из того, что $\mathbb{R}^2 \in T_{3\frac{1}{2}}$ (потому что $\mathbb{R}^2$ нормально и даже метризуемо).

Таким образом, тихоновские пространства далеки от метризуемых, однако топология любого тихоновского X определяется некоторым семейством $\mathcal{D}$ псевдометрик*) в том смысле, что $\{B_d(x,\varepsilon): d \in \mathcal{D}, x \in X, \varepsilon > 0\}$ — база X. Можно взять, например, псевдометрики $d: (x,y) \mapsto |f(x)-f(y)|$ для всех непрерывных f, разделяющих точки и замкнутые множества.
<u>Существование такого семейства $\mathcal{D}$</u> характеризует пр-ва, удовлетвор-е $T_{3\frac{1}{2}}$.

*) Псевдометрика — то же, что метрика, только без требования $d(x,y) \neq 0$ для $x \neq y$.

Не нужно

Вернёмся к проблеме продолжения функций. Как мы видим, в ненормальных пространствах всегда есть замкнутые множества, с которых продолжаются не все непрерывные функции. Однако в некоторых более или менее общих ситуациях продолжение всё равно возможно.

Опр. Подпространство Y топологического пространства X называется <u>ретрактом</u> этого пространства, если существует непрерывное отображение $r: X \to Y$, тождественное на Y (т.е. такое, что $r(y) = y \ \forall y \in Y$). Такое отображение называется <u>ретракцией</u>.

Утв. Y является ретрактом X тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f: Y \to Z$ (в любое топологическое пространство) продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$.

□ Продолжение f — это композиция $f \circ r$, а ретракция — это продолжение тождественного отображения $id_Y: Y \to Y$. ■

Кроме того, существует класс пространств, с которых продолжаются любые непрерывные отображения в тихоновские пространства (в частности, любые непрерывные функции) на любые тихоновские объемлющие пространства. Это компакты. Прежде чем переходить к компактам, сделаем ещё несколько замечаний о непрерывных отображениях и введём понятие гомеоморфизма, которое, в свою очередь, позволит нам формализовать понятие топологического свойства.

При изучении свойств топологических пространств важно знать не только какими подпространствами данное свойство наследуется, но и какими отображениями*) оно сохраняется. Среди свойств, уже рассмотренных нами, общими непрерывными отображениями сохраняется лишь одно.

1. Аксиомы отделимости T_0, T_1 и T_2, регулярность, тихоновость и нормальность не сохраняются непрерывными отображениями неодноточечных пространств — достаточно рассмотреть отображение в неодноточечное антидискретное пространство (оно автоматически непрерывно).

---

*) Топология интересуется только непрерывными отображениями, но они могут обладать разными дополнительными свойствами — быть ретракцией, быть открытыми (переводить открытые множества в открытые), замкнутыми (переводить замкнутые множества в замкнутые) и многими другими.

Нужно определение гомеоморфизма и вложения

2. Свойства удовлетворять аксиомам T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4 тоже не сохраняются — на этот раз надо отобразить дискретное пространство на любое пространство без этих свойств (отображение будет автоматически непрерывным).
3. Метризуемость не сохраняется — опять годится дискретное пространство.
4. Линейная упорядочиваемость не сохраняется потому, что существует непрерывное отображение отрезка $[0,1]$, чья топология порождается обычным линейным порядком на квадрат (кривая Пеано); если бы топология квадрата порождалась линейным порядком, то его можно было бы сделать несвязным удалением одной точки.
5. Первая и вторая аксиома счётности не сохраняются — существует счётное пространство без первой, а значит, и второй аксиомы счётности (хотя бы веер Фреше–Урысона), а счётное дискретное пространство удовлетворяет и первой, и второй аксиоме счётности (первой аксиоме счётности удовлетворяют все дискретные пространства, не только счётные).
6. Свойство Фреше–Урысона не сохраняется по той же причине — существует счётное пространство, в котором все сходящиеся последовательности имеют конечное множество значений.
7. Сепарабельность сохраняется непрерывными отображениями: образ плотного множества при непрерывном отображении плотно. Это легко проверить, рассуждая от противного.

NB Когда пространство X гомеоморфно некоторому $Z \subset Y$, говорят, что X гомеоморфно вложено, или просто вложено (или вкладывается) в Y, а сам гомеоморфизм называют (гомеоморфным) вложением.

Наконец, пора уже сказать, какие отображения играют в топологии ту особую роль, которую изоморфизмы играют в теории групп, биекции — в теории множеств, линейные изоморфизмы — в теории векторных пространств и т.п. Каким должно быть отображение пространств, чтобы мы могли быть уверены, что эти пр-ва неразличимы с точки зрения топологии, т.е. их топологии устроены совершенно одинаково? что они имеют одни и те же топологические свойства? Иными словами, что считать топологическими свойствами?

<u>Опр.</u> Биекция $f: X \to Y$ между топологическими пространствами такое, что f и f^{-1} непрерывны, называется <u>гомеоморфизмом</u>. Пространства, связанные гомеоморфизмом, <u>гомеоморфны</u>. <u>Топологические свойства</u> — это в точности те свойства, которые сохраняются гомеоморфизмами.
(Как множество Y — просто (биективная) копия X; непрерывность f означает, что топология на этой копии слабее топологии X, а непрерывность f^{-1} — что сильнее, так что эти топологии совпадают.)

Все рассмотренные выше свойства являются топологическими, а вот, например, свойство быть подмножеством прямой или числом топологическими не является. Собственно, всё, что мы изучаем — это топологические инварианты, т.е. инварианты относительно гомеоморфизмов, которые раньше было принято называть ещё <u>топологическими отображениями</u>. С их помощью можно различать разные, т.е. негомеоморфные, пространства; общая топология изучает поведение этих свойств при разных операциях, их совместимость друг с другом, а иногда и с другими (например, алгебраическими) структурами и т.п.