Нужно

Непрерывные отображения

Как уже отмечалось при обсуждении мощностей множеств, как правило, в математических теориях рассматриваются специфические для данной теории отображения и имеются особые отображения, наличие которых между объектами теории позволяет утверждать, что свойства этих объектов совершенно одинаковы с точки зрения данной теории. В топологии такими специфическими отображениями являются непрерывные отображения, а особые отображения — это непрерывные отображения специального сорта, называемые гомеоморфизмами.

В теории метрических пространств (как и в математическом анализе) обычно сперва определяется непрерывность отображения в точке пространства, а потом уже глобальная непрерывность (на всём пространстве):

Опр. Отображение f метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (Y,ρ) называется <u>непрерывным в точке</u> $x_0\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для всякого $x\in B_d(x_0,\delta)$ имеем $f(x)\in B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$.

Отображение $f:X\to Y$ метрических пространств непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке $x\in X$.

Утв. 1 Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества (в Y) открыт (в X).

Это свойство непрерывных отображений проверяется непосредственно — оно вытекает из определений непрерывности в точке и открытого множества в метрическом пространстве. В теории топологических пространств это свойство обычно принимают за определение.

Опр. Отображение $f: X\to Y$ топологических пространств называется <u>непрерывным</u>, если прообраз любого открытого множества открыт.

Отображение f непрерывно в точке $x\in X$, если прообраз любой окрестности (в Y) точки $f(x)$ является окрестностью x (здесь окрестности <u>не</u> предполагаются открытыми!)

Нужна Т.1

Есть целый ряд свойств отображения топологических пространств, равносильных непрерывности:

Т.1 Для отображения топологических пространств следующие условия равносильны:

1. прообраз любого открытого множества открыт;
2. прообраз любого замкнутого множества замкнут;
3. отображение непрерывно в каждой точке области определения;
4. образ замыкания любого множества содержится в замыкании образа этого множества;
5. замыкание прообраза любого множества содержится в прообразе замыкания этого множества.

Равносильность этих условий легко проверяется. Каждое из них можно взять за определение непрерывности.

Поскольку, как мы знаем, точка топологического (метрического) пространства является точкой прикосновения (принадлежит замыканию) некоторого множества тогда и только тогда, когда к ней сходится направленность (последовательность) точек этого множества, к приведённому выше списку можно добавить ещё одно равносильное условие.

Т.2 а) Отображение $f: X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любой сходящейся направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в X направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ в Y сходится.

б) Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек X последовательность $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в Y.

Эта теорема немедленно вытекает из Теоремы 1 (4) и того наблюдения, что отображение $(X, d) \to (Y, \rho)$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда это отображение непрерывно как отображение топологических пространств относительно топологий $\mathcal{T}_d$ и $\mathcal{T}_\rho$, порождённых метриками (см. утверждение 1).

NB

Несложно показать также, что отображение $f: X \to Y$ топологических (метрических) пространств непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой направленности $x_\alpha \xrightarrow[A]{} x$ в X (последовательности $x_n \to x$ в X) имеем $f(x_\alpha) \xrightarrow[A]{} f(x)$ в Y ($f(x_n) \to f(x)$ в Y).

Свойства непрерывных отображений

Некоторые свойства мы уже перечислили, когда приводили равносильные определения непрерывности. Имеются и другие общие свойства непрерывных отображений, которые нельзя не упомянуть:

- композиция непрерывных отображений непрерывна;
- сужение*) непрерывного отображения на любое подпространство непрерывно

Очень полезно следующее свойство:

Утв. 2 Если $f: X \to Y$ — отображение топологических пространств и существует предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты в X, то f непрерывно.

□ Достаточно вспомнить определение предбазы и заметить, что операция взятия прообраза при любом отображении множеств сохраняет пересечения и объединения: для любого отображения множеств $\varphi: A \to B$ и любых $B_\iota \subset B$, $\iota \in I$, имеем $\varphi^{-1}(\bigcap_{\iota \in I} B_\iota) = \bigcap_{\iota \in I} \varphi^{-1}(B_\iota)$ и $\varphi^{-1}(\bigcup_{\iota \in I} B_\iota) = \bigcup_{\iota \in I} \varphi^{-1}(B_\iota)$. ■

Локальная версия этого утверждения совсем очевидна: если при отображении $f: X \to Y$ топологических пространств все прообразы локальной базы топологии Y в $f(x)$ (где $x \in X$) являются окрестностями точки x, то отображение непрерывно в x. (Как и в определении, окрестности не предполагаются открытыми!).

Особую роль играют непрерывные функции на топологических пространствах, т.е. непрерывные отображения в $\mathbb{R}$ (с обычной топологией).

Утв. 3 Если X — топологическое пространство и $f, g: X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, то следующие функции $X \to \mathbb{R}$ тоже непрерывны:

- $x \mapsto f(x)+g(x)$
- $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$
- $x \mapsto f(x)-g(x)$
- $x \mapsto |f(x)|$
- $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$
- $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.

Если при этом $0 \notin g(X)$, то непрерывна также и функция $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

*) И, более общо, любое подотображение непрерывного отображения (равно как и надотображение с той же областью определения) непрерывно.

Не нужно, но полезно

Все эти непрерывности несложно проверить непосредственно, но можно пойти и другим путём (который мало чем отличается и вряд ли намного проще, но достоин упоминания): надо заметить, что отображения

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$ $\quad$ $\max : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\max\{x,y\}$

$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x\cdot y$ $\quad$ $\min : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\min\{x,y\}$

$- : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x-y$ $\quad$ $\div : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto \frac{x}{y}$,

равно как и $|\cdot| : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x|$, непрерывны относительно обычных топологий плоскости и прямой, показать, что если $f : X\to\mathbb{R}$ и $g : X\to\mathbb{R}$ — непрерывные функции, то $f\Delta g : X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ x\mapsto(f(x),g(x))$ непрерывно относительно топологии плоскости и воспользоваться непрерывностью композиции непрерывных отображений.

см. также примеры

Примеры

- Любое отображение дискретного пространства в любое топологическое пространство непрерывно.
- Отображение f антидискретного пространства X в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда $f(X)$ антидискретно в топологии, индуцированной из Y.
- Тождественное отображение $id_X : (X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$ (т.е. топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ сравнимы и $\mathcal{T}_1$ сильнее $\mathcal{T}_2$).
- Если $f : X\to\mathbb{R}$ и $g : X\to\mathbb{R}$ — любые непрерывные функции на топологическом пространстве X, то диагональное отображение $f\Delta g : X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, которое определено правилом $x\mapsto(f(x),g(x))$, непрерывно относительно обычной топологии на плоскости. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что множества вида $\{(x,y) : a<x<b,\ c<y<d\}$ образуют базу топологии $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и показать, что их прообразы открыты.
- Существует непрерывное отображение $\Pi : [0,1]\xrightarrow{\text{на}}[0,1]\times[0,1]$ (здесь $[0,1]$ — обычный отрезок). Такое отображение называется <u>кривой Пеано</u>. Строится она так: для $x\in[0,1]$ с троичным разложением $0,x_1x_2\ldots$ положим $f_1 = x_1$, $f_2 = \begin{cases} x_3, & \text{если } x_2 \text{ чётно} \\ 2-x_3, & \text{если } x_2 \text{ нечётно} \end{cases}$, …
$f_k = \begin{cases} x_{2k-1}, & \text{если } x_2+x_4+\ldots+x_{2k-2} \text{ чётно,} \\ 2-x_{2k-1}, & \text{если } x_2+\ldots+x_{2k-2} \text{ нечётно} \end{cases}$, … и, аналогично,
$g_k = \begin{cases} x_{2k}, & \text{если } x_1+x_3+\ldots+x_{2k-1} \text{ чётно,} \\ 2-x_{2k}, & \text{если нет.} \end{cases}$
Обозначим $f(x)$ число с троичным разложением $0,f_1f_2\ldots$ и $g(x)$ — число с троичным разложением $0,g_1g_2\ldots$. Можно проверить, что функции $f,g : [0,1]\to[0,1]$ непрерывны и сюръективны. Осталось положить $\Pi = f\Delta g$. (Надо еще показать, что это отображение тоже сюръективно.)

- Из непрерывности отображения в точке не вытекает непрерывность на больших множествах (например, в окрестности точки). Существует отображение топологических пространств и даже числовая функция, которая непрерывна ровно в одной точке, например,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в 0 и разрывна во всех остальных точках; прообраз никакой ограниченной окрестности нуля не открыт.

- На любом метрическом пространстве (X, d) естественно возникает целое семейство непрерывных функций, а именно, $x \mapsto d(x, x_0)$, где $x_0 \in X$ — любая фиксированная точка, и, более общо, $x \mapsto d(x, A)$, где $A \subset X$ — любое фиксированное множество. Это важное утверждение, и мы сформулируем его отдельно:

Т.3 Для любого метрического пространства (X, d) и любого $A \subset X$ функция $f: X \to \mathbb{R}$, определенная правилом $f(x) = d(x, A)$, непрерывна.

□ Для того, чтобы доказать теорему, достаточно проверить, что

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x, y \in X. \qquad (*)$$

Сделаем это. Для любой точки $z \in A$ имеем

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Поскольку $d(x,A) = \inf\{d(x,z') : z' \in A\} \leq d(x,z)$, имеем

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Это неравенство выполнено для любого $z \in A$; переходя к инфимуму в правой части, получаем

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A).$$

Меняя местами x и y, видим, что

$$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A).$$

Таким образом, $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ и $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$, откуда вытекает неравенство $(*)$, а вместе с ним и теорема. ■

Заметим, что x — точка прикосновения множества A в метрическом пространстве (X, d) тогда и только тогда, когда $d(x, A) = 0$. Следовательно, множество A замкнуто в (X, d) (а значит, и в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_d)$) тогда и только тогда, когда $d(x, A) = 0 \iff x \in A$. Отсюда вытекает следующая замечательная теорема.

Т.4 | Любое метризуемое пространство нормально.

□ Пусть X — метризуемое пространство и d — какая-нибудь метрика на X, порождающая его топологию. Возьмём любые непересекающиеся замкнутые множества $A, B \subset X$. Функция $d(x,A)$ непрерывна и принимает значение 0 в точности в точках A, и функция $d(x,B)$ непрерывна и принимает значение 0 в точности в точках B. Положим $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$; знаменатель этой дроби никогда не равен нулю, потому что $A \cap B = \varnothing$. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ непрерывна, и она принимает значение 0 на множестве A и 1 на множестве B. Множества $U = f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ и $V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)\right)$ открыты (это прообразы открытых множеств при непрерывном отображении), причём $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. ■

Из доказательства этой теоремы видно, что в метризуемом пространстве непересекающиеся замкнутые множества не только отделимы окрестностями, но и <u>функционально отделимы</u>, т.е. для любых таких множеств существует непрерывная функция, которая постоянна на каждом из этих множеств и принимает на них разные значения. (Иными словами, такие множества отделимы не просто открытыми множествами, но открытыми множествами, являющимися прообразами интервалов при непрерывной функции. Это очень хорошие открытые множества; в частности, любое такое множество есть пересечение счётного числа замкнутых, что случается далеко не всегда.) Оказывается, этим свойством — что непересекающиеся замкнутые множества функционально отделимы — обладают не только метризуемые, но и все нормальные пространства.

Следующая фундаментальная теорема по историческим причинам называется леммой Урысона.