Нужно

Подпространства

Опр. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство и $Y \subseteq X$. Тогда, как легко видеть, семейство $\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ является топологией на множестве Y. Пара $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ называется <u>подпространством</u> пространства $(X, \mathcal{T})$, а топология $\mathcal{T}_Y$ — <u>индуцированной</u>, или <u>относительной</u>, топологией (а иногда и просто топологией подпространства).

Таким образом, если X — топологическое пространство и $Y \subset X$, то множество $A \subset Y$ открыто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = Y \cap U$ для некоторого $U \subset X$, открытого в X, и замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = Y \cap F$ для некоторого $F \subset X$, замкнутого в X.

<u>Примеры</u>

1. Топология, индуцированная на прямой как подмножестве плоскости с обычной топологией, совпадает с обычной топологией прямой.
2. Топология, индуцированная на подмножестве $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ прямой $\mathbb{R}$ с обычной топологией, такова: все точки $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, изолированы, а окрестности точки 0 — дополнения до конечных множеств.
3. Множество рациональных точек с топологией, индуцированной из прямой, не содержит ни одной изолированной точки, тогда как множество целых чисел дискретно (т.е. все его точки изолированы).

Зам. 1 Отношение "быть подпространством" между топологическими пространствами транзитивно: если Y — подпространство пространства X, а Z — подпространство Y, то Z — подпространство X.

Зам. 2 Если $\mathcal{B}$ — база топологического пространства X, то $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ — база его подпространства Y.

Если X — топологическое пространство и Y — его подпространство, то множество, открытое (замкнутое) в Y вовсе не обязано быть таковым в X; но если Y открыто (замкнуто), то все его открытые (замкнутые) подмножества открыты (замкнуты) в X.

Нужно

Особую роль играют подпространства $Y \subset X$ со свойством $\overline{Y} = X$.

Опр. Множество Y в топологическом пространстве X называется <u>плотным</u> (или <u>всюду</u>*) <u>плотным</u>) в X, если $\overline{Y} = X$.

Мы уже знакомы с двумя кардиналозначными характеристиками топологического пространства — весом и характером. С плотными подмножествами естественно связана ещё одна характеристика, которая называется <u>плотностью</u>:

$$d(X) = \min\{|Y| : Y \subset X, \overline{Y} = X\}.$$

Опр. Пространства, имеющие счётное плотное подмножество (т.е. пространства X счётной плотности, для которых $d(X) \le \aleph_0$) называются <u>сепарабельными</u>.

Плотные подпространства наследуют многие свойства объемлющего топологического пространства. Свойства, которые наследуются любыми подпространствами, называются <u>наследственными</u>. Таковы, например, свойства удовлетворять первой и второй аксиомам счётности, аксиомам отделимости $T_0 - T_3$ и быть пространством Фреше-Урысона; последнее вытекает из следующего замечания.

Зам. 3 Если X — топологическое пространство, $Y \subset X$, $A \subset Y$ и $a \in Y$, то a является точкой накопления A в подпространстве Y тогда и только тогда, когда a является

NB точкой накопления A в X. Следовательно, $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$ **).

Метризуемость — тоже наследственное свойство. Действительно, если X — метризуемое пространство и его топология порождается метрикой d, то, как нетрудно проверить, сужение $d' = d|_{Y \times Y}$ является метрикой на Y для любого $Y \subset X$. При этом всякий шар $B_{d'}(y, \varepsilon)$ для $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ является пересечением шара $B_d(y, \varepsilon)$ с Y, а значит, топология, индуцированная на Y из X, совпадает с топологией, порождённой метрикой d'.

*) В отечественной литературе о множествах, плотных во всём рассматриваемом пространстве, обычно говорят, что они всюду плотны, а о множествах, плотных в подпространстве Y рассматриваемого пространства, говорят, что они плотны в Y; в западной литературе "всюду" встречается редко.

**) Когда важно, в каком пространстве берется замыкание, это пространство указывается в верхнем или нижнем индексе: $\overline{A}^X$, $\mathrm{cl}_X(A)$, $[A]_X$ и т.п.

Не нужно

Однако в случае линейно упорядоченных пространств это рассуждение уже не работает: если X — топологическое пространство, топология которого порождена линейным порядком $\leq$ на X (т.е. базой топологии являются все открытые промежутки — интервалы $(a,b) = \{x \in X : a < x < b\}$, левые лучи $\{x \in X : x < a\}$ и правые лучи $\{x \in X : b < x\}$) и $Y \subset X$, то, конечно, сужение $\leq_Y$ порядка $\leq$ на Y (т.е. $\leq \cap\, Y \times Y$) является линейным порядком на Y, однако пересечение открытого промежутка в $(X, \leq) \subset Y$ вовсе не обязано содержать хоть какой-нибудь непустой открытый промежуток в $(Y, \leq_Y)$. Действительно, пусть X — обычная прямая $\mathbb{R}$ с обычной топологией, порождённой обычным порядком $\leq$, и пусть $Y = (0,1) \cup \{2\}$. Тогда всякий открытый промежуток в $(Y, \leq_Y)$, содержащий точку 2, обязан пересекаться с $(0,1)$, поскольку любой такой промежуток имеет вид $\{y \in Y : a <_Y y\}$ для некоторого $a <_Y 2$, а в Y все $a <_Y 2$ принадлежат $(0,1)$. Однако в $(X, \leq)$ интервал $(1,3)$ содержит точку 2, но с $(0,1)$ не пересекается. Таким образом, точка $2 \in Y$ изолирована в топологии, индуцированной на Y из X, но не изолирована в топологии, порождённой порядком $\leq_Y$. Более того, пространство Y с индуцированной топологией неупорядочиваемо, т.е. его топология не порождается никаким линейным порядком на Y. Значит, свойство быть упорядочиваемым пространством не наследственно.

Другой пример ненаследственного свойства — сепарабельность. Уже знакомая нам плоскость Немыцкого L сепарабельна, потому что любое открытое множество в L содержит точку с рациональными координатами, а множество всех таких точек счётно; однако топология, индуцированная на граничной прямой $l \subset L$, дискретна, а сама граничная прямая несчётна, а несчётное дискретное пространство не может быть сепарабельным. (Единственное плотное множество в произвольном дискретном пространстве X — само X.)

В метризуемых пространствах ситуация меняется: всякое сепарабельное метризуемое пространство <u>наследственно сепарабельно</u>, т.е. любое его подпространство сепарабельно. Это вытекает из следующих двух утверждений:

Нужно

Т.1 Всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.

□ Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и пусть Y — плотное множество в X. Тогда $\mathcal{B} = \{B_d(y, \frac{1}{n}) : y \in Y, n \in \mathbb{N}\}$ — база топологии X. Действительно, если U — открытое множество в X и $x \in U$, то $B_d(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Возьмём натуральное $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$; имеем $B_d(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Выберем любую точку $y \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \cap Y$ (она существует, так как Y плотно). Легко видеть, что $x \in B_d(y, \frac{1}{2n}) \subset B_d(x, \frac{1}{n}) \subset U$.

■ Мы показали, что $\mathcal{B}$ — база. Осталось заметить, что если Y счётно, то $\mathcal{B}$ счётна.

Т.2 Любое пространство со второй аксиомой счётности сепарабельно.

□ Достаточно взять любую счётную базу топологии и выбрать точку в каждом её элементе. Множество всех выбранных точек, очевидно, плотно. ■

След. Любое сепарабельное метризуемое пространство наследственно сепарабельно.

□ В силу замечания 2 свойство удовлетворять второй аксиоме счётности наследственно. Осталось применить теоремы 1 и 2. ■

Как мы уже отмечали, плоскость Немыцкого сепарабельна, но не наследственно сепарабельна. Она является примером неметризуемого регулярного пространства с первой аксиомой счётности.

Хотя сепарабельность и не наследственное свойство, она наследуется любыми открытыми подпространствами:

Зам.4 Любое открытое подпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

<u>Нормальность</u> — ещё одно ненаследственное свойство. Позже мы продемонстрируем это. Сейчас мы ограничимся двумя утверждениями, первое из которых — очевидное замечание, немедленно вытекающее из определений топологии подпространства и нормальности.

Нужно знать очевидное зам. 5

Зам. 5 Нормальность наследуется замкнутыми подпространствами.

$\boxed{\text{Т.3}}$ Для топологического T_1-пространства[*)] X следующие условия равносильны:

(i) X наследственно нормально;

(ii) любое открытое подпространство X нормально;

(iii) любые два отделённых множества в X отделены открытыми окрестностями, т.е. $\forall A, B \subset X$ таких, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, найдутся открытые $U, V \subset X$ такие, что $U \cap V = \varnothing$, $A \subset U$ и $B \subset V$.

□ Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна. Покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $A, B \subset X$ отделены. Положим $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) \subset X$. Очевидно, $A, B \subset Y$. Замыкания множеств A и B в Y не пересекаются. В силу нормальности Y существуют открытые в Y множества U и V такие, что $U \cap V = \varnothing$, $A \subset U$ и $B \subset V$. Поскольку Y открыто в X, множества U и V открыты также и в X.

Для завершения доказательства осталось показать, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть Y — произвольное подпространство X и $A, B \subset Y$ — пара непересекающихся множеств, замкнутых в Y. Очевидно, A и B отделены в X. Значит, они отделены в X непересекающимися окрестностями U и V (в силу условия (iii)). Множества $U \cap Y$ и $V \cap Y$ открыты в Y и отделяют A от B. ■

Как и сепарабельность, в классе метризуемых пространств нормальность наследственна — просто потому, что метризуемость наследственна и всякое метризуемое пространство нормально. Последнее утверждение проще всего доказать с помощью непрерывных отображений, к которым мы сейчас и перейдём.

---

*) Без предположения $X \in T_1$ утверждение останется верным, но тогда надо говорить не "нормально", а "удовлетворяет аксиоме T_4."

Нужно

Дополнение: В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующий очевидный, но весьма полезный факт:

Полезное замечание

Если X — пространство, U — открытое подмножество X и Y — всюду плотное подмножество X (т.е. $\overline{Y}=X$), то

$$\overline{U}=\overline{U\cap Y}.$$

Действительно, если x — предельная точка множества U, то для любой окрестности V точки x имеем $V\cap U\neq\emptyset$, а поскольку Y всюду плотно в X (и $V\cap U$ открыто), имеем также $V\cap U\cap Y\neq\emptyset$. Значит, x является предельной точкой множества $U\cap Y$, откуда $\overline{U}\subset\overline{U\cap Y}$. Обратное включение в доказательстве не нуждается.