Нужно

Сходимость

Напомним, что *последовательностью* элементов множества X называется любое отображение $f: \mathbb{N} \to X$. Точка $f(n) = x_n$ называется n-м членом, или элементом последовательности, или членом (элементом) с номером n. Множество $f(\mathbb{N}) \subset X$ называется *множеством значений*[*)] последовательности. Последовательности обычно записываются в виде $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Подпоследовательность* данной последовательности — это последовательность, которая получается вычеркиванием из данной последовательности некоторых членов (при условии, что бесконечное число членов остаются невычеркнутыми). Формально: пусть $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $k_n = g(n)$. Тогда $f \circ g$ — подпоследовательность данной последовательности f; обозначается она $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Мы сформулируем понятие сходимости последовательности сразу в терминах окрестностей.

Опр. | Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in U$ для любого $n \geq N$. Иными словами, все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат U. В этом случае говорят, что точка x является пределом[**)] последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Точкой накопления последовательности называется точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов последовательности (иногда говорят не "точка накопления", а "предельная точка"). Точка накопления последовательности может не быть таковой для множества её значений (если это множество конечно), а предельная точка множества значений может не быть предельной точкой (= точкой накопления) последовательности (если пространство не T_1). Однако в T_1-пространствах точки накопления (предельные точки) последовательности с бесконечным множеством значений совпадают с точками накопления = предельными точками множества её значений.

*) Не следует путать множество значений послед-ти с самой послед-ю. У постоянной послед-ти $(a, a, a, \ldots)$ бесконечное число членов, но мн-во значений $\{a\}$.

**) В не T_1-пространствах пределов может быть много, и правильнее писать $x \in \lim x_n$.

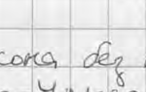
В метризуемом пространстве всякая предельная точка множества A является пределом некоторой последовательности точек A. Пространства с этим свойством называются пространствами Фреше–Урысона. Помимо метрических пространств, им обладают пространства с первой аксиомой счётности (и не только).

Утв. 1 Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счётности и $A \subset X$. Тогда $x \in X$ является предельной точкой множества A, если и только если к ней сходится некоторая последовательность точек A.

□ Пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счётная база окрестностей точки x. Положим $V_n = \bigcap_{i \le n} U_i$ для каждого n. Получим убывающее (не обязательно строго) семейство $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ окрестностей x, которое, очевидно, тоже является базой окрестностей. Если x — предельная точка A, то каждая окрестность V_n содержит некоторую точку $a_n \in A$. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к x: любая окрестность U точки x содержит некоторую окрестность V_N (потому что $\{V_n\}$ — база), а значит, и все V_n для $n \ge N$. По построению имеем $a_n \in U$ для $n \ge N$.

Обратное утверждение (что если последовательность точек из A сходится к x, то x предельна для A) ■ очевидно.

Пример пространства Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности — это <u>веер Фреше–Урысона</u>, который представляет собой счётное число копий множества $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ плюс одна точка 0:



Формально это множество можно записать как $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{N}$.
Все точки, кроме 0, изолированы, а окрестности нуля — множества вида $\{0\} \cup \{(\frac{1}{n}, k) : n \ge n_k, k \in \mathbb{N}\}$, где $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — любая последовательность натуральных чисел.

Пример топологического пространства, не являющегося пространством Фреше–Урысона — это любое пространство без сходящихся нетривиальных*) последовательностей, например, $D \cup \{p\}$, где D — несчётное множество, а p — не принадлежащая ему точка. Все точки D изолированы, а окрестности p — <u>дополнения до счётных множеств</u>.

*) Мы называем (здесь) последовательность тривиальной, если она становится постоянной с некоторого момента, т.е. все её члены начиная с некоторого номера равны. Термин не общепринятый, но иногда используется в литературе.

Нужно

Однако у утверждения 1 имеется аналог для произвольных пространств.

Опр. Пара $(A, \leq)$, где A — множество и $\leq$ — отношение на A со свойствами ① $a \leq a$ $\forall a \in A$, ② $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ и ③ $\forall a, b \in A$ $\exists c \in A$: $a \leq c$, $b \leq c$ называется направленным вверх (или по возрастанию) множеством. Направленность в множестве X — это любое отображение из некоторого направленного вверх множества A в X. Направленности записываются как $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ или просто (x_α).

Направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в топологическом пространстве X сходится к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ т., что $x_\alpha \in U$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$. В этом случае говорят, что x — предел направленности (x_α) и пишут $x = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ *) или $x_\alpha \xrightarrow[A]{} x$.

Последовательность — частный случай направленности.

Направленность $(y_\beta)_{\beta \in (B, \preceq)}$ называется поднаправленностью направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in (A, \leq)}$, если существует отображение $\varphi: B \to A$ такое, что $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ для всех $\beta \in B$ и для каждого $\alpha_0 \in A$ $\exists \beta_0 \in B$ т., что $\alpha_0 \leq \varphi(\beta)$ при всех $\beta \succeq \beta_0$ (иными словами, $\varphi(B)$ неограничено в A и направлено отношением $\leq|_{\varphi(A) \times \varphi(A)}$, и $\varphi(\preceq)$ в определённом смысле согласовано с $\leq$).

Точка x топологического пространства X называется предельной точкой направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в X, если для любой окрестности U этой точки и любого $\alpha_0 \in A$ $\exists \alpha \in A$ такое, что $\alpha \geq \alpha_0$ и $x_\alpha \in U$. (Если говорить об аналогиях, то это скорее аналог не предельной точки множества, а точки полного накопления, которая будет определена позже.)

Утв. 2 Точка x топологического пространства X является предельной точкой направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в X тогда и только тогда, когда некоторая поднаправленность направленности (x_α) сходится к x.

□ $\Rightarrow$ Рассмотрим направленное множество $(B, \preceq)$, состоящее из всех пар (α, U), где U — произвольная окрестность точки x, а $\alpha \in A$ удовлетворяет условию $x_\alpha \in U$. Направление

*) В нехаусдорфовом пространстве пределов может быть много, и тогда пишут $x \in \lim x_\alpha$.

Т.2 не нужна (хотя полезно иметь в виду)

$\precsim$ определяется естественным образом: $(\alpha, U) \precsim (\beta, V)$, если $\alpha \le \beta$ (где $\le$ — направление на A) и $U \supset V$. Рефлексивность и транзитивность отношения $\precsim$ очевидны. Если $(\alpha, U), (\beta, V) \in B$, то в силу того, что $\le$ — направление, найдётся $\gamma \in A$ такое, что $\alpha \le \gamma$ и $\beta \le \gamma$, а в силу того, что x — предельная точка для (x_α), найдётся $\delta \in A$ такое, что $\delta \ge \gamma$ и $x_\delta \in U \cap V$. Имеем $(\delta, U \cap V) \succsim (\alpha, U)$ и $(\delta, U \cap V) \succsim (\beta, V)$. Значит, $\precsim$ — действительно направление на B. Нетрудно проверить, что $(y_{(\alpha,U)})_{(\alpha,U)\in B}$, где $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha$ для всех $(\alpha, U) \in B$, является поднаправленностью направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ (надо взять $\varphi : B \to A$, определённое правилом $\varphi(\alpha, U) = \alpha$) и что $y_{(\alpha,U)} \xrightarrow[B]{} x$.

$\Leftarrow$ Обратная импликация вытекает непосредственно из определений поднаправленности, её предела и предельной точки направленности.

▨

Т.1 Точка y в топологическом пространстве X является точкой накопления множества $Y \subset X$ тогда и только тогда, когда некоторая направленность в Y сходится к y.

□ $\Rightarrow$ Пусть y — точка накопления Y. Очевидно, множество $\mathcal{U}(y)$ всех окрестностей y направлено отношением $\le \, = \, \supset$. Пользуясь тем, что y — точка накопления множества Y, в каждой окрестности $U \in \mathcal{U}(y)$ выберем $y_U \in U \cap Y$. По построению $y_U \xrightarrow[\mathcal{U}(x)]{} y$.

$\Leftarrow$ Пусть $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ — направленность, $y_\alpha \in Y$ для всех $\alpha \in A$ и $y_\alpha \xrightarrow[A]{} y$. По определению предела направленности для любой окрестности U точки y существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $y_\alpha \in U$ для всех $\alpha \ge \alpha_0$, в частности, для α_0, а это и есть определение точки накопления.

▨

Т.2 Топологическое пространство хаусдорфово тогда и только тогда, когда в нём каждая сходящаяся последовательность имеет ровно один предел.

□ $\Rightarrow$ Очевидно (из определений предела и хаусдорфовости).

$\Leftarrow$ Пусть $x \ne y$, любые окрестности x и y пересекаются. Рассмотрим множество пар (U, V), где U — окрестность x и V — окрестность y, направленное отношением $\le$: $(U_1, V_1) \le (U_2, V_2)$, если $U_1 \supset U_2$ и $V_1 \supset V_2$. Обозначим это множество A. Для каждого $(U, V) \in A$ зафиксируем точку $z_{(U,V)} \in U \cap V$.

▨ Ясно, что направленность $(z_{(U,V)})_{(U,V)\in A}$ сходится как к x, так и к y.