Не нужно

Метрические и топологические пространства

Итак, топология появилась в результате изучения свойств геометрических объектов, которые не зависят от измерений (расстояния и пр.) Другой путь развития топологии пролегал через обобщение идеи сходимости. Этот процесс начался в 1817 г., когда Больцано ассоциировал понятие сходимости не только с последовательностью чисел, но с любым ограниченным множеством чисел. В 1872 г. Кантор ввёл понятие множества предельных точек и определил замкнутые подмножества прямой как множества, содержащие все свои предельные точки. Кантор ввёл также открытые множества. Вейерштрасс в своих лекциях в 1877 г. ввел понятие окрестности точки на прямой (через последовательности). Гильберт предложил аксиоматику геометрии и определил двумерное многообразие в терминах окрестностей (в 1899-1900 гг.) В 1905 г. Фреше предложил схему аксиом сходимости в абстрактном множестве, а также аксиомы метрического пространства*) Он также ввёл понятие компактности (хотя сейчас его понятие — это счетная компактность).

Наконец, в 1909 г. Рис совершенно избавился от метрики и предложил новый аксиоматический подход к топологии, основанный на понятии предельной точки, а в 1914 г. Хаусдорф определил окрестности с помощью четырех аксиом. В 1925 г. П.С. Александров сформулировал современные аксиомы топологии на абстрактном множестве. Однако его определение эквивалентно определению Хаусдорфа, так что своим рождением общая топология обязана именно Хаусдорфу.

*) В связи с рассмотрением функциональных пространств.

Нужно

Метрическое пространство

Опр. Метрическое пространство — это пара (X, d), где X — множество, а d — функция, определенная на декартовом произведении $X \times X$ и принимающая вещественные значения со свойствами

- $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (аксиома симметрии)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (аксиома, или неравенство треугольника)

Функция d называется *метрикой*, а её значение в (x, y) — *расстоянием* между точками x и y. *Расстояние между множествами* $A^{\neq\varnothing}, B^{\neq\varnothing} \subset X$ определяется как $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Вместо $d(\{x\}, A)$ пишут $d(x, A)$.

Если не может возникнуть путаницы, обычно пишут X вместо (X, d)

Зам. Из аксиом вытекает, что $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$.

Опр. Пусть $\varepsilon > 0$ и x_0 — точка в метрическом пространстве (X, d). ε-Окрестностью точки x_0 называется множество $B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ (Это множество называется также *открытым шаром* с центром в точке x_0 радиуса ε). *Окрестностью* точки x_0 называется любая её ε-окрестность. Множество $U \subset X$ *открыто*, если $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0$, для которого $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Множество $F \subset X$ *замкнуто*, если $X \setminus F$ открыто.

Зам. В силу неравенства треугольника все множества вида $B_d(x, \varepsilon)$ открыты; таким образом, открытые множества — это в точности всевозможные объединения множеств вида $B_d(x, \varepsilon)$ с разными x и ε. Точнее, $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда существуют $A \subset X$ и $B \subset \mathbb{R}_+$ такие, что $U = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon) : x \in A, \varepsilon \in B\}$.

Определение Хаусдорфа нужно для понимания дальнейшего. Остальное нужно

Топологическое пространство

Опр. Хаусдорф

Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{N})$, где X — множество и $\mathcal{N}: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ некоторое семейство $\mathcal{N}(x)$ подмножеств X так, что выполнены следующие аксиомы:

① $x \in N \quad \forall N \in \mathcal{N}(x)$;

② если $N \in \mathcal{N}(x)$ и $N \subset M \subset X$, то $M \in \mathcal{N}(x)$;

③ $N, M \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow N \cap M \in \mathcal{N}(x)$;

④ $\forall N \in \mathcal{N}(x)\ \exists M \in \mathcal{N}$ т., что $M \subset N$ и $N \in \mathcal{N}(y)\ \forall y \in M$.

Элементы семейства $\mathcal{N}(x)$ называются окрестностями точки x, отображение $\mathcal{N}$ — окрестностной топологией, а множество $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ его значений — системой окрестностей. Множество $U \subset X$ открыто, если $\forall x \in U\ \exists N \in \mathcal{N}(x)$, для которого $N \subset U$. Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто.

Именно такой подход к окрестностям используется и по сей день в западной литературе. В отечественной литературе под окрестностями (почти) всегда имеются в виду открытые окрестности и система окрестностей (которую мы во избежание путаницы будем называть системой открытых окрестностей) определяется по-другому.

Опр. Пусть X — множество и $\mathcal{U}: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ — отображение, удовлетворяющее следующим аксиомам:

① $x \in U \quad \forall U \in \mathcal{U}(x)$;

② $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}(x)$ т., что $W \subset U \cap V$;

③ $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \forall y \in U\ \exists V \in \mathcal{U}(y)$ т., что $V \subset U$.

Элементы семейства $\mathcal{U}(x)$ называются (открытыми) окрестностями точки x, а множество $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$ — системой (открытых) окрестностей (топологии на X, порожденной этой системой). Множество $U \subset X$ открыто, если $\forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{U}(x)$, для которого $V \subset U$. Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто.

Зам. В силу третьей аксиомы последнего определения все элементы семейств $\mathcal{U}(x)$ открыты; таким образом, открытые множества — это всевозможные объединения открытых окрестностей.

NB! Семейство всех ε-окрестностей всех точек в метрическом пространстве удовлетворяет аксиомам системы открытых окрестностей и, стало быть, порождает некоторую («метрическую») топологию.

Во всех предыдущих определениях открытые множества определяются через окрестности. Двигаясь в противоположном направлении, приходим к следующему определению топологического пространства, которое принимается за основное в современной науке.

Опр. П.С. Александров

Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{T})$, где X — множество, а $\mathcal{T}$ — семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим аксиомам:

① $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

② если $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ (т.е. если $V_\alpha \in \mathcal{T}$, $\alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$)

③ если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$ (и, значит, если $U_i \in \mathcal{T}$, $i \le n$, то $\bigcap_{i \le n} U_i \in \mathcal{T}$).

Семейство $\mathcal{T}$ называется *топологией*, его элементы — *открытыми* множествами, а их дополнения — *замкнутыми* множествами. Множество U называется (открытой) окрестностью*) точки $x \in X$, если $x \in U$ и $U \in \mathcal{T}$. Аналогично определяются (открытые) окрестности произвольных множеств $A \subset X$: U — окрестность A, если U есть объединение окрестностей всех точек $x \in A$; открытую окрестность множества A можно также определить как произвольное открытое множество, содержащее A.

Если не может возникнуть путаницы, обычно пишут X вместо $(X, \mathcal{T})$

Очевидно, множество окрестностей в смысле второго определения образует систему открытых окрестностей, а семейства множеств, открытых в смысле любого из первых двух определений, удовлетворяют аксиомам в определении топологии. Кроме того, рассматривая только те окрестности из первого определения, которые открыты в смысле первого определения, получаем систему открытых окрестностей, порождающую ту же топологию, и рассматривая все надмножества открытых окрестностей из второго определения, получаем систему окрестностей в смысле первого определения, которая порождает ту же топологию. Таким образом все эти определения равносильны. Благодаря законам де Моргана можно было бы определить топологию в терминах замкнутых множеств, наложив двойственные аксиомам топологии условия на систему замкнутых множеств и объявив открытыми множества, чьи дополнения замкнуты.

Отметим, что $\emptyset$ и X замкнуты, пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

*) В западной литературе окрестность определяется как произвольное надмножество открытой окрестности.

Базы и предбазы.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Как уже отмечалось, семейство $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ образует систему открытых окрестностей и потому порождает некоторую топологию $\mathcal{T}_d$ в том смысле, что в $(X, \mathcal{T}_d)$ множество открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторых элементов $\mathcal{B}$. Семейства открытых множеств в топологических пространствах с этим свойством называются базами топологии или самих пространств. Таким образом, $\mathcal{B}$ образует базу топологии $\mathcal{T}_d$ (или пространства $(X, \mathcal{T}_d)$). Заметим, что базу $\mathcal{T}_d$ образуют и меньшие семейства: например, достаточно рассмотреть не все ε-окрестности, а только ε_n-окрестности всех точек $x \in X$, где $\varepsilon_n \searrow 0$. Во многих случаях достаточно ограничиться точками x, принадлежащими некоторому подмножеству X; например, если $X = \mathbb{R}^2$ с обычной метрикой d, то базу топологии $\mathcal{T}_d$ образуют, например, множества вида $B_d(x, \frac{1}{n})$, где $x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Опр. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ называется *базой* топологии $\mathcal{T}$ или топологического пространства X, если любое открытое множество в X есть объединение элементов $\mathcal{B}$.

Зам. Очевидно, семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ является базой тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдется $V \in \mathcal{B}$, для которого $x \in V \subset U$ (вместо "окрестности" можно написать "открытой окрестности").

Зам. Определение базы (с учётом предыдущего замечания) отличается от определения системы открытых окрестностей лишь в том, что база содержит $\varnothing$, а система открытых окрестностей — нет.

Зам. Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathcal{B} = X$ и пересечение любых двух элементов $\mathcal{B}$ является объединением некоторого семейства элементов $\mathcal{B}$.

Базы — один из основных инструментов задания топологии на множестве (как, например, в случае метрической топологии); однако второе свойство в последнем замечании не всегда легко проверить, поэтому зачастую удобнее пользоваться предбазами.

Опр. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ называется <u>предбазой</u> топологии $\mathcal{T}$ или топологического пространства X, если семейство всех конечных пересечений*) элементов $\mathcal{B}$ образует базу топологии $\mathcal{T}$.

Зам. Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Наконец, иногда бывает полезно рассмотреть локальный вариант базы.

Опр. <u>Локальная база</u> топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ в точке $x \in X$, или <u>база (открытых) окрестностей</u> точки $x \in X$, — это семейство $\mathcal{B}(x)$ (открытых) окрестностей точки x с тем свойством, что любая окрестность x содержит элемент $\mathcal{B}(x)$.

"открытых" в скобках потому, что требование открытости несущественно — можно его включать или не включать

Всякая предбаза однозначно определяет базу, а база однозначно определяет топологию. Семейство локальных баз во всех точках $x \in X$ тоже однозначно определяет топологию (оно является системой (открытых) окрестностей). Однако, как уже отмечалось на примере метрических топологий, одна и та же топология может иметь (и почти всегда имеет) много разных баз. Если

NB! $\mathcal{B}$ — база топологии $\mathcal{T}$, то любое семейство $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$, содержащее $\mathcal{B}$, — тоже база.

Уже сейчас можно ввести две важнейшие характеристики топ. пространств.

Опр. Кардинал $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ — база $X\}$ — <u>вес</u> топ. пр-ва X.
Пространство X с $w(X) \le \aleph_0$ удовлетворяет <u>второй аксиоме счётности</u>.
Кардинал $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x)$ — лок. база X в $x\}$ — <u>характер</u> X в точке $x \in X$.
Кардинал $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$ — <u>характер</u> топол. пространства X.
Пространство X с $\chi(X) \le \aleph_0$ удовлетворяет <u>первой аксиоме счётности</u>

Зам. Для любого метрического (X, d) пространство $(X, \mathcal{T}_d)$ удовл. 1 а.с.

Зам.!! Если $w(X) \le \kappa$, то любая база $\mathcal{B}$ содержит базу $\mathcal{B}'$, $|\mathcal{B}'| \le \kappa$: надо взять базу $\mathcal{B}''$, $|\mathcal{B}''| \le \kappa$, для каждой пары $(U, V) \in \mathcal{B}'' \times \mathcal{B}''$ зафиксировать $W_{U,V} \in \mathcal{B}$ т, что $U \subset W_{U,V} \subset V$ (если это возможно) и положить $\mathcal{B}' = \{W_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{B}'' \times \mathcal{B}'', \exists W \in \mathcal{B} : U \subset W \subset V\}$.

*) т.е. пересечений конечного числа

Нужно

Примеры

Пространства с топологиями, порождёнными метриками, составляют важнейший класс топологических пространств, поэтому мы начнём с примеров метрических пространств.

Примеры метрических пространств

1. Произвольное множество X с дискретной метрикой $d: (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$ Эта метрика порождает дискретную топологию $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ на X.

   Она интересна хотя бы тем, что $\chi(X) = \aleph_0$, но $w(X) > \aleph_0$ для $|X| > \aleph_0$.

Это пр-во со 2 а.с.

2. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d: (x,y) \longmapsto |x-y|$. Эта метрика порождает обычную топологию, базой которой служат все открытые интервалы.

Вес такого пространства равен его размерности

3. На любом нормированном векторном пространстве V с нормой $\|\cdot\|$ стандартным образом определяется метрика $d(x,y) = \|x-y\|$. (хотя имеются и другие естественные метрики, например, $d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}$ или $d(x,y) = f(\|x-y\|)$ для любой неубывающей функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойствами $f(0)=0$ и $f(a+b) \le f(a)+f(b)$.) В частности, на векторном пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ определена метрика $d(x,y) = \sqrt{(x-y,x-y)}$. (Действительно: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ — норма; неравенство $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ вытекает из неравенства Коши–Буняковского $|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)(y,y)}$.) Пример такого пространства — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Метрика $\sqrt{(x-y,x-y)}$ порождает на нём обычную топологию.

Это пр-во со 2 а.с.

4. Важнейший пример векторного пространства со скалярным произведением — это гильбертово пространство $\ell^2 = \{\bar{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. (Оно включено в целую серию нормированных пространств $\ell^p = \{\bar{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, $\|\bar{x}\| = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}$.) Этот пример важен потому, что он универсален в разных отношениях — с одной стороны, все гильбертовы пространства счётной размерности ему изоморфны, с другой — любое пространство со счётной базой реализуется как его подпространство (в естественном смысле, определённом ниже), откуда следует, что топология любого такого пространства порождена нек. метрикой.

Нужно 7

2a.c.

5. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с метрикой, порождённой <u>p-адической</u> нормой $|\cdot|$ (p — простое число), которая определяется так: Любое $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, можно представить как $p^n \frac{a}{b}$, где n, a и b целые, причём a и b не делятся на p. Полагаем $|r|_p = p^{-n}$ и $|0|_p = 0$. Можно проверить, что $|\cdot|_p$ — действительно норма, причём порождаемая ею метрика d_p удовлетворяет <u>сильному неравенству треугольника</u> $d_p(x,z) \leq \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$. Такие метрики называются <u>неархимедовыми</u>*) или <u>ультраметриками</u>.

Другой пример ультраметрического пространства — дискретные пространства

В ультраметрических пространствах любая точка шара является его центром, и если два шара пересекаются, то один из них содержится в другом. (Отсюда вытекает, что все шары и открыты, и замкнуты одновременно.) Кроме того, все треугольники равнобедренны.

Таким образом, p-адическая метрика сильно отличается от обычной метрики $|x-y|$ на $\mathbb{Q}$, однако эти метрики порождают одну и ту же топологию.

6. Ещё один важный пример — <u>метрический ёж</u> (Ковальского). Пусть κ — любой кардинал. <u>Ёж колючести κ</u> — это объединение κ копий единичного отрезка (иголок) с общим началом 0. (Формально такое объединение можно записать как $X = \{0\} \cup ((0,1] \times \kappa)$.) Расстояние между точками x и y определяется как обычное расстояние $|x-y|$, если x и y принадлежат одной иголке, и как сумма их расстояний до 0, если они принадлежат разным иголкам. (Формально: $d(0,0)=0$, $d(0,(a,\alpha)) = a$ $\forall \alpha \in \kappa$, $d((a,\alpha),(b,\beta)) = \begin{cases} |a-b|, & \text{если } \alpha = \beta, \\ a+b, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$) Вес пространства с топологией, порождённой этой метрикой, равен κ. С помощью ежа Ковальского несложно строится пространство, универсальное для всех метризуемых пространств веса κ.

7. Новые метрики можно строить из уже имеющихся. Например, если d — метрика на X, то $\alpha \cdot d$ (где $\alpha > 0$), $\min\{d, \alpha\}$ (где α — функция, тождественно равная $\alpha > 0$) и $f \circ d$ (где $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, $f(0) = 0$ и $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$) — тоже метрики, и они задают ту же топологию; если d_1 и d_2 — две метрики, то $d_1 + d_2$ и $\max\{d_1, d_2\}$ — тоже метрики.

*) Не выполнен принцип Архимеда: если даны два отрезка, то, отложив достаточное количество раз меньший из них, можно покрыть больший.

Нужно

<u>Примеры топологических пространств</u>

Поскольку всякая метрика порождает топологию, примеры метрических пространств дают одновременно и примеры топологических пространств. Если X — топологическое пространство и существует метрика, порождающая его топологию, то говорят, что X <u>метризуемо</u>. Метрики, порождающие одну и ту же топологию (на одном и том же множестве), называются <u>эквивалентными</u>.*)

1. На всяком множестве X можно ввести топологию $\{\varnothing, X\}$ (она называется <u>антидискретной</u>) и $\mathcal{P}(X)$ (она называется <u>дискретной</u>). Вторая порождается дискретной метрикой (и потому метризуема), а первая не порождается никакой метрикой (неметризуема), потому что в метрическом пространстве любые две точки имеют непересекающиеся окрестности.

2. Если $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, то на нём можно ввести <u>топологию линейного порядка</u>, или <u>интервальную топологию</u>. Базой такой топологии является множество всех интервалов, т.е. множеств видов $\{x: x > a\}$, $\{x: x < b\}$ и $\{x: a < x < b\}$, где $a, b \in X$. Например, обычная метрическая топология прямой порождается такими интервалами (относительно обычного порядка на $\mathbb{R}$). На плоскости тоже имеется естественный линейный порядок — лексикографический: $(a,b) < (c,d)$, если либо $a<c$, либо $a=c$ и $b<d$. Однако в топологии, порождаемой этим порядком, гораздо больше открытых множеств, нежели в обычной топологии: в ней, в частности, открыты все вертикальные (лучи и) интервалы (без концов). (Все множества, открытые в обычной топологии, тоже открыты в топологии лексикографического порядка, потому что в ней открыты множества вида $\bigcup\{((x,a),(x,b)) : x \in (c,d)\}$, которые образуют базу обычной топологии. Тем не менее топология лексикографического порядка на плоскости метризуема.

Лучи можно исключить, если в X нет максимального (минимального) элемента.

---

*) Понятие эквивалентности метрик радикально отличается от понятия эквивалентности норм: $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ для некоторых $c, C > 0$ и всех x. Аналогичное понятие для метрик называется <u>равномерной эквивалентностью</u>.

Нужно 3, 5

1 a.c. неметризуемо

3. Ещё один пример пространства с топологией линейного порядка — это множество ω_1 всех счётных ординалов с обычным порядком $<$ ($\in$), наделённое соответствующей топологией. Это пространство уже не метризуемо (это будет показано при изучении компактности), но с 1 а.с.

4. Можно задавать топологии явным указанием без всякой связи с другими структурами, такими как метрика или порядок. Например, можно объявить предбазой топологии на $\mathbb{N}$ множество всех бесконечных арифметических прогрессий. Нетрудно показать, что если две такие прогрессии пересекаются, то их пересечение тоже будет бесконечная арифметическая прогрессия, так что эта предбаза является и базой; кроме того, никакое конечное множество (в частности, $\{1\}$) не открыто в этой топологии (а значит, она не дискретна). Заметим, что любая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не превосходит разности, не только открыта, но и замкнута в этой топологии. Действительно, любая такая прогрессия с разностью d принадлежит конечному множеству прогрессий с разностью d и первыми членами $1, \dots, d$, которые не пересекаются и покрывают $\mathbb{N}$. Отсюда немедленно вытекает конечность множества простых чисел: прогрессии вида $\{p, 2p, 3p, \dots\}$ замкнуты и покрывают $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, так что если бы их было лишь конечное число, то множество $\{1\}$ было бы открытым.

5. Многие важные примеры топ. пространств получаются путём модификации известных пространств, например, добавлением новых открытых множеств. Такова плоскость Немыцкого, которая понадобится нам очень скоро. Это верхняя полуплоскость L (вместе с граничной прямой l), топология которой задаётся такой системой открытых окрестностей: открытые окрестности точек $L \setminus l$ — это обычные окрестности в обычной топологии плоскости, а окрестности каждой точки $x \in l$ — это множества вида $D_x \cup \{x\}$, где D_x — открытый круг, касающийся l в точке x. Это пространство неметризуемо (увидим ниже), но удовлетворяет 1 а.с.