Теорема. *Пространство* $\mathbf{P}$ *иррациональных чисел гомеоморфно тихоновскому произведению* $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.

Доказательство. Стандартный путь доказательства использует разложение действительных чисел в цепные дроби, т.е. в конечные или бесконечные дроби вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}\,,$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_n \in \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$. Как известно, для каждого числа такое разложение определено однозначно и вещественное число рационально тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь конечно; с другой стороны, любая последовательность натуральных чисел является последовательностью неполных частных некоторой цепной дроби. Возникает взаимно однозначное соответствие между иррациональными числами и бесконечными последовательностями из $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Нетрудно проверить, что семейство интервалов вида $\big([a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + 1], [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]\big)$ образует базу топологии пространства $\mathbf{P}$ и что

$$\begin{aligned}([a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]) \cap \mathbf{P} = \\ = \{[a_0; a_1, \dots, a_n + 1, a_{n+1}, \dots] : a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Следовательно, это соответствие является гомеоморфизмом относительно обычной (индуцированной из прямой) топологии на множестве иррациональных чисел и тихоновской топологии на множестве $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}^{\aleph_0}$.

Ту же самую (с топологической точки зрения) конструкцию можно описать явно, без апелляции к теории чисел. На первый взгляд это описание кажется громоздким, но суть его проста.

Поскольку $\mathbb{Z}$ гомеоморфно $\mathbb{N}$ и $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, достаточно построить гомеоморфизм между $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{P}$.

Как-нибудь перенумеруем рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

Положим $I_\varnothing = \mathbb{R}$ и выберем счётное число рациональных точек x_n, $n \in \mathbb{Z}$, так, что $x_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} -\infty$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $x_n < x_k$ для $n < k$, $x_{n+1} - x_n < 1$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ и одна из точек x_n совпадает с q_1. Например, можно положить $x_n = q_1 + \frac{n}{2}$ для $n \in \mathbb{Z}$. В результате мы получим счётное семейство интервалов $I_n = (x_n, x_{n+1})$ длины меньше 1, которое покрывает $\mathbf{P}$, причём q_1 является одним из концов этих интервалов. Если q_2 принадлежит одному из интервалов I_n, то обозначим номер этого интервала через m_2, а если q_2 не принадлежит ни одному из них (т.е. q_2 совпадает с одним из концов x_n интервалов I_n), то скажем, что число m_2 не определено.

Затем мы выберем счётное число рациональных точек $x_{(m,n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, в каждом интервале $I_m = (x_m, x_{m+1})$ так, что $x_{(m,n)} \xrightarrow[n \to -\infty]{} x_m$, $x_{(m,n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_{m+1}$, $x_{(m,n)} < x_{(m,k)}$ для $n < k$ и $x_{(m,n+1)} - x_{(m,n)} < \frac{1}{2}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$; кроме того, если m_2 определено, то мы потребуем, чтобы одна из точек $x_{(m_2,n)}$ совпадала с q_2. Например, можно выбрать любую точку $q \in I_m$ (для $m = m_2$ нужно взять $q = q_2$) и положить $x_{(m,0)} = q$, $x_{(m,n)} = x_m - \frac{q - x_m}{2n}$ для $n < 0$ и $x_{(m,n)} = x_{m+1} - \frac{x_{m+1} - q}{2n}$ для $n > 0$. В результате для каждого $m \in \mathbb{Z}$ мы получим счётное семейство интервалов $I_{(m,n)} = \big(x_{(m,n)}, x_{(m,n+1)}\big)$ длины меньше $\frac{1}{2}$, которое покрывает $\mathbf{P} \cap I_m$. При этом q_2 является одним из концов либо интервалов $I_{(m,n)}$, либо интервалов I_n, построенных на предыдущем шаге. Если q_3 принадлежит одному из интервалов $I_{(m,n)}$, то обозначим индекс этого интервала через (m_3, k_3), а если q_3 не принадлежит ни одному из них (т.е. является одним из концов интервалов $I_{(m,n)}$ или интервалов I_n, построенных на предыдущем шаге), то скажем, что пара (m_3, k_3) не определена.

Снова выберем счётное число рациональных точек $x_{(m,k,n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, в каждом интервале $I_{(m,k)}$ так, что $x_{(m,k,n)} \xrightarrow[n \to -\infty]{} x_{(m,k)}$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_{(m,k+1)}$, $x_{(m,k,n)} < x_{(m,k,l)}$ для $n < l$ и $x_{(m,k,n+1)} -$

$x_{(m,k,n)} < \frac{1}{3}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$; кроме того, если пара (m_3, k_3) определена, то мы потребуем, чтобы одна из точек $x_{(m_3,k_3,n)}$ совпадала с q_3. В результате для каждой пары $(m,k) \in \mathbb{Z}^2$ мы получим счётное семейство интервалов $I_{(m,k,n)} = \big(x_{(m,k,n)}, x_{(m,k,n+1)}\big)$ длины меньше $\frac{1}{3}$, которое покрывает $\mathbf{P} \cap I_{(m,k)}$. При этом q_3 является одним из концов либо интервалов $I_{(m,k,n)}$, либо интервалов, построенных на предыдущих шагах.

Продолжая в том же духе, мы получим семейство открытых интервалов $I_{(s_1,\dots,s_n)}$, где $n \in \omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и[1] $(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{Z}^n$, со следующими свойствами:

① $I_\varnothing = \mathbb{R}$, и для любого непустого набора $(s_1,\dots,s_n)$ множество $I_{(s_1,\dots,s_n)}$ — открытый интервал в $\mathbb{R}$ с рациональными концами;

② для любых $k \in \omega$ и $(s_1,\dots,s_k) \in \mathbb{Z}^k$ выполнены соотношения $I_{(s_1,\dots,s_k)} \cap \mathbf{P} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_{(s_1,\dots,s_k,n)}$ и $I_{(s_1,\dots,s_k)} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{I}_{(s_1,\dots,s_k,n)}$;

③ для любых $(s_1,\dots,s_k) \in \mathbb{Z}^k$ и $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$, где $k \leqslant n$, пересечение $I_{(s_1,\dots,s_k)} \cap I_{(t_1,\dots,t_n)}$ непусто тогда и только тогда, когда $s_i = t_i$ для всех $i \leqslant k$;

④ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{Z}^n$ выполнено неравенство $|I_{(s_1,\dots,s_n)}| < \frac{1}{n}$;

⑤ каждое рациональное число является концом по меньшей мере одного[2] из интервалов вида $I_{(s_1,\dots,s_n)}$.

Для каждой последовательности $(s_1, s_2, \dots) \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$ положим

$$f\big((s_1, s_2, \dots)\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{(s_1,\dots,s_n)}.$$

В силу условия ② имеем $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{(s_1,\dots,s_n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{I}_{(s_1,\dots,s_n)}$, так что из теоремы Коши–Кантора о стягивающихся отрезках и условия ④ вытекает, что для любой фиксированной последовательности $(s_1, s_2, \dots)$ пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{(s_1,\dots,s_n)}$ состоит из ровно одной точки. По условию ⑤ эта точка иррациональна, а по условию ② каждое иррациональное число представимо в виде такого пересечения. Значит, f — биекция между $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$ и $\mathbf{P}$. Очевидно, все пересечения вида $I_{(t_1,\dots,t_n)} \cap \mathbf{P}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $t_i \in \mathbb{Z}$ для $i \leqslant n$, образуют базу топологии пространства $\mathbf{P}$, и для каждого набора $(t_1,\dots,t_n)$ имеем

$$I_{(t_1,\dots,t_n)} \cap \mathbf{P} = f\Big(\big\{(t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots) : {\scriptstyle t_{n+i} \in \mathbb{Z} \text{ для } i \in \mathbb{N}}\big\}\Big),$$

т.е. прообразы этих пересечений при биекции f образуют базу топологии пространства $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$. Это означает, что f является гомеоморфизмом. ■

Следствие. *Пространство* $\mathbf{P}$ *иррациональных чисел гомеоморфно своей счётной степени* $\mathbf{P}^{\aleph_0}$.

Предложение. *Топологическое произведение* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *метризуемо полной метрикой (т.е. его топология порождается некоторой полной метрикой) тогда и только тогда, когда каждый сомножитель метризуем полной метрикой.*

Набросок доказательства. Заметим, что метрика d на множестве X полна тогда и только тогда, когда полна метрика $\tilde{d}(x,y) = \min\big\{d(x,y), 1\big\}$. Нетрудно показать, что если d_n — ограниченная единицей метрика на X_n для каждого $n \in \mathbb{N}$, то $d\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} d_n(x_n - y_n)^2/2^n}$ — метрика на $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, порождающая топологию тихоновского произведения пространств X_n с метрическими топологиями $\mathscr{T}_{d_n}$, и что последовательность точек $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, где $\mathbf{x}_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in$

[1] Естественно, $\mathbb{Z}^0 = \varnothing$, потому что $0 = \varnothing$.

[2] На самом деле ровно двух.

$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ для $k\in\mathbb{N}$, сходится к некоторой точке $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ или является фундаментальной в $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d\right)$ тогда и только тогда, когда для каждого n последовательность n-х координат $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к точке x_n или соответственно является фундаментальной в (X_n, d_n). Отсюда легко вывести требуемое утверждение. ■

Следствие. *Пространство* $\mathbf{P}$ *метризуемо полной метрикой.*

Это утверждение вытекает из предыдущего предложения, но можно и явно указать полную метрику на $\mathbf{P}$. Годится, например, метрика, определённая правилом

$$\rho(x,y)=|x-y|+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}\cdot\min\bigl\{\bigl|\frac{1}{\Delta_n(x)}-\frac{1}{\Delta_n(y)}\bigr|,1\bigr\}\quad \text{для } x,y\in\mathbf{P},$$

где $\Delta_n(x)=\min\bigl\{\bigl|x-\frac{p}{q}\bigr|:p,q\in\mathbb{Z},0<q\leqslant n\bigr\}$. То, что это действительно метрика, проверяется без труда. Покажем, что она полна.

Поскольку $\rho(x,y)>|x-y|$ для любых $x,y\in\mathbf{P}$, любая фундаментальная последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $(\mathbf{P},\rho)$ является также фундаментальной и относительно обычной метрики. В силу полноты пространства $\mathbb{R}$ с обычной метрикой последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $x\in\mathbb{R}$. Предположим, что x рационально, т.е. $x=\frac{p}{q}$ для некоторых $p\in\mathbb{Z}$ и $q\in\mathbb{N}$. Точки x_n неограниченно приближаются к $\frac{p}{q}$ при возрастании n, поэтому для любого $k\in\mathbb{N}$ найдётся такое $n\in\mathbb{N}$, что число $\bigl|x_n-\frac{p}{q}\bigr|$ достаточно мало для выполнения неравенства $\bigl|\frac{1}{\Delta_q(x_k)}-\frac{1}{\Delta_q(x_n)}\bigr|>1$. Для этого n имеем $\rho(x_k,x_n)>\frac{1}{2^q}$, так что вопреки предположению последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не фундаментальна относительно метрики ρ.

Теперь предположим, что число x иррационально. Тогда для любых $a>0$ и $m\in\mathbb{N}$ можно найти такое $\delta>0$, что если y удовлетворяет условию $|x-y|<\delta$, то $|\Delta_k(x)-\Delta_k(y)|<\frac{a}{2}\cdot(\Delta_k(x))^2$ при всех $k\leqslant m$. Если при этом $a<1$, то для таких y и всех $k\leqslant m$ имеем также $\Delta_k(y)\geqslant\frac{\Delta_k(x)}{2}$ (потому что в противном случае мы бы получили $1<a\cdot\Delta_k(x)$, тогда как, очевидно, $\Delta_k(x)<1$) и

$$\bigl|\frac{1}{\Delta_k(x)}-\frac{1}{\Delta_k(y)}\bigr|=\frac{|\Delta_k(x)-\Delta_k(y)|}{\Delta_k(x)\cdot\Delta_k(y)}<\frac{2\cdot|\Delta_k(x)-\Delta_k(y)|}{(\Delta_k(x))^2}<a.$$

Возьмём любое положительное $\varepsilon<1$. Найдём $m\in\mathbb{N}$, для которого $\frac{3}{2^m}<\varepsilon$, и такое $\delta>0$, что $|\Delta_k(x)-\Delta_k(y)|<\frac{1}{2^{m+1}}\cdot(\Delta_k(x))^2$ для всех $k\leqslant m$ и всех y, удовлетворяющих условию $|x-y|<\delta$. Вспомним, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к x в обычной метрике, и найдём такое $N\in\mathbb{N}$, что $|x-x_n|<\min\bigl\{\delta,\frac{1}{2^m}\bigr\}$ для всех $n\geqslant N$. Для таких n имеем

$$\rho(x,x_n)<\tfrac{1}{2^m}+\sum_{k\leqslant m}\frac{1}{2^k}\cdot\min\bigl\{\bigl|\frac{1}{\Delta_k(x)}-\frac{1}{\Delta_k(x_n)}\bigr|,1\bigr\}+$$
$$+\sum_{k\geqslant m+1}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}<\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к x и в метрике ρ.

Заметим, что мы одновременно показали, что $B_d\bigl(x,\min\{\delta,\frac{1}{2^m}\}\bigr)\subset B_\rho(x,\varepsilon)$. Поскольку проведённое выше рассуждение справедливо для любого иррационального x, тем самым мы доказали, что любая окрестность любой точки $x\in\mathbf{P}$ относительно метрики ρ содержит некоторую окрестность относительно d, т.е. топология, порождённая метрикой ρ, слабее топологии, порождённой метрикой d. То, что топология, порождённая метрикой d, слабее топологии, порождённой метрикой ρ, очевидно. Значит, метрики d и ρ эквивалентны.

Предложение. *Пространства* $\mathbb{Q}$ *(рациональных чисел) и* $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$ *не метризуемы полной метрикой.*

Доказательство. Если бы топология пространства $\mathbb{Q}$ порождалась полной метрикой, то согласно задаче 12 оно было бы пространством со свойством Бэра. Однако $\mathbb{Q}$ является счётным объединением своих одноточечных подпространств, каждое из которых нигде не плотно, так как $\mathbb{Q}$ не имеет изолированных точек.

Утверждение относительно $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$ вытекает из доказанного выше предложения. ■

Следствие. *Пространства* $\mathbf{P}^{\aleph_0}$ *и* $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$ *не гомеоморфны.*