Ясно, что дополнение $\mathbb{R}\setminus A$ до любого тощего множества A в $\mathbb{R}$ является тучным множеством (см. определения в конспектах к предыдущему вопросу), — иначе пространство $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$ можно было бы представить как объединение нигде не плотных подмножеств. Однако дополнение до тучного множества вовсе не обязано быть тощим. (Ситуация здесь похожа на то, что происходит с нигде не плотными и всюду плотными множествами, — дополнение до нигде не плотного множества всегда всюду плотно, однако дополнение до всюду плотного множества нигде не плотно, только если это множество содержит открытое всюду плотное множество.) Дополнения до тощих множеств называются *остаточными*; всякое остаточное множество является тучным, но не наоборот.

Построить плотное неостаточное множество второй категории в $\mathbb{R}$ легко — годится тот же пример $\mathbb{Q}\cup[0,1]$. Однако среди таких множеств встречаются множества с удивительными свойствами — *множества Бернштейна.* Так называются множества $B \subset \mathbb{R}$ с тем свойством, что B и $\mathbb{R} \setminus B$ пересекают все несчётные замкнутые подмножества прямой (или, что равносильно, все несчётные компактные подмножества прямой).

Доказательство существования множеств Бернштейна в $\mathbb{R}$ основано на двух наблюдениях.

Во-первых, *число несчётных замкнутых подмножеств пространства* $\mathbb{R}$ *равно* $2^{\aleph_0}$. Действительно, каждое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}$ является объединением некоторого семейства элементов счётной базы $\mathscr{B}$ топологии пространства $\mathbb{R}$; значит, число открытых (а следовательно, и замкнутых) множеств не превосходит мощности $2^{\aleph_0}$ множества $\mathscr{P}(\mathscr{B})$ всех подмножеств счётного множества $\mathscr{B}$. С другой стороны, $\mathbb{R}$ содержит $2^{\aleph_0}$ несчётных замкнутых подмножеств $[-a, a]$, $a > 0$. Значит, $\mathbb{R}$ содержит ровно $2^{\aleph_0}$ несчётных замкнутых множеств.

Во-вторых, *мощность любого несчётного замкнутого подмножества* $\mathbb{R}$ *равна* $2^{\aleph_0}$. Это доказывается так:

Сначала заметим, что у всякого несчётного множества K в $\mathbb{R}$ имеются как минимум две *точки конденсации* — это такие точки $x \in \mathbb{R}$, что $U \cap K$ несчётно для всякой окрестности x. Действительно, возьмём любую точку $a \in K$ и предположим, что каждая точка $x \in K \setminus \{a\}$ имеет окрестность U_x, для которой $U \cap K$ не более чем счётно; ясно, что такие окрестности U_x можно выбрать в счётной базе $\mathscr{B}$ топологии прямой $\mathbb{R}$. Заметим, что $K \setminus \{a\} \subset \bigcup\{U_x \cap K : x \in K \setminus \{a\}\}$, причём число разных множеств $U_x \cap K$ не более чем счётно и каждое из этих множеств тоже не более чем счётно. Значит, $|K \setminus \{a\}| \leqslant \aleph_0$, что противоречит несчётности множества K.

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — несчётный компакт. Возьмём две его разные точки конденсации, a и b. Теперь выберем два открытых интервала $(a_0, b_0) \ni a$ и $(a_1, b_1) \ni b$ с непересекающимися замыканиями и положим $I_0 = [a_0, b_0] \cap K$ и $I_1 = [a_1, b_1] \cap K$. Заметим, что I_0 и I_1 — несчётные компактные подмножества прямой, и повторим процедуру для каждого из них, получив две пары непересекающихся несчётных компактов $I_{00}, I_{01} \subset I_0$ и $I_{10}, I_{11} \subset I_1$. Дальше будем действовать так же: на n-м шаге, имея попарно непересекающиеся несчётные компакты $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ для всех наборов $i_1 i_2 \dots i_n$ нулей и единиц, мы будем в каждый из них вписывать по два непересекающихся несчётных компакта $I_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ и $I_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$.

Потом мы положим $C_n = \bigcup\{I_{i_1 i_2 \dots i_n} : i_j \in \{0, 1\}$ для $j \leqslant n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и заметим, что множество $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$ и содержится в K.

Наконец, всякое несчётное замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ можно представить как объединение счётного числа компактов $F \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Хотя бы один из этих компактов должен быть несчётен.

Теорема. *Существует* $2^{\aleph_0}$ *попарно непересекающихся множеств Бернштейна.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{F}$ семейство всех несчётных замкнутых подмножеств прямой. Пользуясь тем, что $|\mathscr{F} \times \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, заиндексируем все пары (F, x), где $F \in \mathscr{F}$ и $x \in \mathbb{R}$, ординалами $\alpha < 2^{\aleph_0}$: $\mathscr{F} \times \mathbb{R} = \{(F, x)_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. Для каждого $\alpha < 2^{\aleph_0}$ положим F_α равным первому элементу пары $(F, x)_\alpha$, а x_α — второму. В результате множество $\mathscr{F} \times \mathbb{R}$

окажется заиндексированным несколько непривычным образом:

$$\mathscr{F} \times \mathbb{R} = \{(F_\alpha, x_\alpha) : \alpha < 2^{\aleph_0}\}.$$

Заметим, что каждое множество $F \in \mathscr{F}$ является первым элементом пар (F, x) со всевозможными вторыми элементами и всем этим парам присвоены разные индексы, поэтому для каждого $F \in \mathscr{F}$ число индексов α, для которых $F = F_\alpha$, равно $2^{\aleph_0}$.

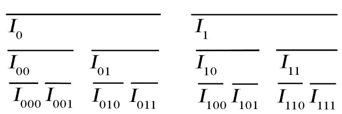
Построим по трансфинитной рекурсии множество попарно различных чисел $\{b_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. В качестве b_0 выберем любую точку из F_0. Предположим, что $0 < \alpha < 2^{\aleph_0}$ и для всех $\beta < \alpha$ точки b_β уже выбраны. Множество $F_\alpha \setminus \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ непусто, потому что $|\alpha| < 2^{\aleph_0}$, так как $2^{\aleph_0}$ — кардинал и α — ординал, меньший этого кардинала, а значит, мощность множества $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$ меньше $2^{\aleph_0}$. Выберем в этом множестве любую точку b_α.

Теперь для каждого числа $x \in \mathbb{R}$ положим $B_x = \{b_\alpha : x_\alpha = x\}$. Ясно, что если $x \neq y$, то $B_x \cap B_y = \varnothing$. С другой стороны, каковы бы ни были $x \in \mathbb{R}$ и $F \in \mathscr{F}$, найдётся $\alpha < 2^{\aleph_0}$, для которого $(F, x) = (F_\alpha, x_\alpha)$, и по построению $b_\alpha \in F_\alpha \cap B_x$. Следовательно, любое множество B_x пересекает все несчётные подмножества прямой, а значит, является множеством Бернштейна — ведь его дополнение содержит объединение множеств B_y, $y \neq x$, каждое из которых тоже пересекает все несчётные подмножества прямой. ■

Очевидно, любое множество Бернштейна плотно в $\mathbb{R}$ (оно пересекает все непустые отрезки, а значит, и все непустые открытые интервалы).

Осталось проверить, что всякое множество Бернштейна является множеством второй категории, т.е. не является множеством первой категории. Для этого достаточно показать, что каждое множество первой категории не пересекается с некоторым несчётным замкнутым подмножеством прямой, или, иными словами, что любое счётное пересечение плотных открытых подмножеств прямой (каковым является дополнение до любого множества первой категории) содержит несчётное замкнутое подмножество.

Пусть U_n, $n \in \mathbb{N}$, — плотные открытые подмножества пространства $\mathbb{R}$, и пусть $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Пользуясь тем, что множество U_1 открыто и плотно, а пространство $\mathbb{R}$ регулярно, выберем два непустых открытых интервала (a_0, b_0) и (a_1, b_1), замыкания которых не пересекаются и содержатся в U_1, и положим $I_0 = [a_0, b_0]$ и $I_1 = [a_1, b_1]$. Затем, заметив, что пересечения $U_2 \cap I_0$ и $U_2 \cap I_1$ открыты и плотны в I_0 и I_1 соответственно, выберем непересекающиеся непустые неодноточечные отрезки $I_{00}, I_{01} \subset U_2 \cap I_0$ и $I_{10}, I_{11} \subset U_2 \cap I_1$. Дальше будем действовать таким же образом: на n-м шаге, имея попарно непересекающиеся непустые неодноточечные отрезки $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ для всех наборов $i_1 i_2 \dots i_n$ нулей и единиц, мы впишем в каждый из них по два непересекающихся непустых неодноточечных отрезка $I_{i_1 i_2 \dots i_n 0}, I_{i_1 i_2 \dots i_n 1} \subset U_{n+1}$.



Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $C_n = \bigcup\{I_{i_1 i_2 \dots i_n} : i_j \in \{0, 1\}$ для $j \leqslant n\}$ (это объединение всех отрезков, построенных на n-м шаге). Замкнутое подпространство прямой $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$; тем более оно несчётно. В самом деле, для каждой последовательности нулей и единиц $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ отрезки $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют центрированное семейство замкнутых множеств в компакте $I_0 \cup I_1$, так что их пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ непусто. Кроме того, для разных последовательностей $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ эти пересечения не пересекаются. Значит, $|C| \geqslant \left|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$. Осталось заметить, что $C \subset U$.