Определение 1. Подмножество A топологического пространства X *нигде не плотно*, если всякое непустое открытое множество в пространстве X содержит непустое открытое подмножество, не пересекающее A.

Другими словами, множество нигде не плотно, если дополнение до его замыкания всюду плотно.

Теорема Бэра о категории для компактов. *В любом компакте X пересечение $G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$ любой последовательности $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

Доказательство. Предположим, что компакт X непуст (в противном случае доказывать нечего). Возьмём любое непустое открытое множество $U \subset X$. Поскольку G_1 открыто и плотно, найдётся непустое открытое множество U_1, для которого $\overline{U}_1 \subset U \cap G_1$ (достаточно взять любую точку $x \in U \cap G_1$, заметить, что $U \cap G_1$ — окрестность этой точки, и воспользоваться регулярностью компакта X). Точно так же найдём непустое открытое множество U_2, для которого $\overline{U}_2 \subset U_1 \cap G_2$, и т.д. В результате мы получим последовательность $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ непустых открытых множеств с тем свойством, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n \cap G_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\{\overline{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ — центрированное семейство. В силу компактности пространства X пересечение $\bigcap \overline{U}_n$ непусто. С другой стороны, по построению $\bigcap \overline{U}_n \subset U \cap G$. Из произвольности непустого открытого множества U следует, что множество G всюду плотно. ■

Аналогично доказывается теорема Бэра для полных метрических пространств, только в качестве множеств U_n надо выбирать шары убывающих радиусов.

В литературе часто встречается двойственная формулировка теоремы Бэра — в терминах нигде не плотных множеств.

Теорема Бэра$'$. *В любом компакте дополнение до объединения любой последовательности нигде не плотных множеств всюду плотно.*

Чтобы увидеть, что обе формулировки равносильны, достаточно вспомнить, что множество $Y \subset X$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда открытое множество $X \setminus \overline{Y}$ всюду плотно.

Теорема Бэра называется теоремой о категории в связи с придуманным Бэром способом различать «большие» и «маленькие» (или, в общепринятой терминологии, «тучные» и «тощие») множества в топологическом пространстве. В классификации Бэра *множества первой категории* (*тощие* множества) — это те множества, которые можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств; все прочие множества называются *множествами второй категории* (*тучными*). Пространства, которые являются тощими (тучными) множествами в себе, называют пространствами первой (второй) категории. О пространстве, в котором всякое тощее множество имеет пустую внутренность, говорят, что оно *обладает свойством Бэра*. Отметим, что любое пространство со свойством Бэра является пространством второй категории, но не наоборот: примером служит подпространство $\mathbb{Q} \cup [0,1]$ вещественной прямой.

В этой терминологии теорема Бэра звучит так:

Теорема Бэра$''$. *Всякий компакт обладает свойством Бэра.*

Прямая $\mathbb{R}$ — пространство со свойством Бэра. Это следует из того, что обычная метрика на прямой полна. Можно воспользоваться и теоремой Бэра для компактов: если $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$, где все N_i нигде не плотны в $\mathbb{R}$, то $[0,1] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (N_i \cap [0,1])$, причём, очевидно, все пересечения $N_i \cap [0,1]$ нигде не плотны в $[0,1]$, а это противоречит теореме Бэра.