Пусть $\mathbb{P} = (P, \leqslant, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество (ч.у.м.) с наибольшим элементом $\mathbf{1}$.

Напомним, что элементы $x, y \in P$ *совместимы*, если существует $z \in P$ такой, что $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$.

Определение 1. Множество $D \subset P$ *плотно* в $\mathbb{P}$, если для каждого $p \in P$ существует $d \leqslant p$, $d \in D$.

Определение 2. Множество $A \subset P$ называется *антицепью*, если оно состоит из попарно несовместимых элементов. Множество $C \subset P$ называется *цепью*, если отношение $\leqslant$ индуцирует на нём линейный порядок.

В следующем определении слово «цепей» следовало бы заменить на «антицепей», но по устоявшейся традиции говорят именно о цепях.

Определение 3. Говорят, что ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет *условию счётности цепей* (*у.с.ц.*), если $\mathbb{P}$ не содержит несчётных антицепей.

Аксиома Мартина

Определение 4. Пусть $\mathbb{P} = (P, \leqslant, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество с наибольшим элементом $\mathbf{1}$ и $\mathscr{D}$ — любое семейство его подмножеств. Множество $F \subset P$ называется *$\mathscr{D}$-генерическим фильтром*, если

1. $\mathbf{1} \in F$;
2. для любых $p, q \in F$ существует $r \in F$ такое, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$;
3. если $p \in F$, $q \in P$ и $p \leqslant q$, то $q \in F$;
4. $F \cap D \neq \varnothing$ для любого $D \in \mathscr{D}$.

Аксиома Мартина. *Для любого ч.у.м. $\mathbb{P}$, удовлетворяющего условию счётности цепей, и любого семейства $\mathscr{D}$ плотных подмножеств P мощности $|\mathscr{D}| < 2^\omega$ существует $\mathscr{D}$-генерический фильтр.*

Замечание 1. CH $\implies$ MA

Действительно, если $|\mathscr{D}| < 2^\omega$, то $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$, и пользуясь плотностью каждого D_n, можно выбрать $d_n \in D_n$ так, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \dots$. Затем останется положить

$$F = \{p \in P : \exists n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } p \geqslant d_n\}.$$

Определение 5. Семейство множеств назвается *центрированным*, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Теорема 1 (MA + ¬CH). *Пусть X — топологическое пространство со свойством Суслина и $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых подмножеств X. Тогда найдётся несчётное множество $A \subset \omega_1$, для которого семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано.*

Доказательство. Для каждого $\alpha < \omega_1$ положим $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma > \alpha} U_\gamma$. Для любых $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega$ имеем $V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_2}$. Существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что

$$\forall \beta > \alpha_0 (\overline{V}_\beta = \overline{V}_{\alpha_0}) \qquad (\star)$$

(черта сверху — замыкание). Действительно, в противном случае мы могли бы найти возрастающую несчётную последовательность ординалов $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ такую, что $\overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \overline{V}_{\alpha_\xi}$, т.е. $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \varnothing$, для каждого ξ. Множества $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}}$ открыты и попарно не пересекаются. Свойство Суслина $\implies$ все они, кроме счётного числа, должны быть пустыми.

Зафиксируем $\alpha_0 < \omega_1$, для которого выполнено условие $(\star)$, и положим

$$P = \{p \subset V_{\alpha_0} : p \text{ открыто и } p \neq \varnothing\}.$$

Упорядочим P по включению. Максимальный элемент $\mathbf{1}$ — это V_{α_0}. $\mathbb{P}$ удовлетворяет у.с.ц., так как X обладает свойством Суслина. Для $\alpha < \omega_1$ положим

$$D_\alpha = \{p \in P : \exists \beta > \alpha (p \subset U_\beta)\}.$$

Множество D_α плотно: если $p \in P$, то $p \cap V_\alpha \neq \varnothing$ в силу $(\star)$, и из того, что $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma>\alpha} U_\gamma$, следует, что $p \cap U_\gamma \neq \varnothing$ для некоторого $\gamma > \alpha$. Имеем $p \cap U_\gamma \in D_\alpha$ и $p \cap U_\gamma \leqslant p$.

Положим $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $\neg$CH $\implies$ $\omega_1 < 2^\omega$. MA $\implies$ $\exists\, \mathscr{D}$-генерический фильтр F (семейство открытых подмножеств X). Семейство F центрировано, так как любые два $p, q \in F$ совместимы в F, т.е. их пересечение содержит элемент F. Положим

$$A = \{\beta < \omega_1 : \exists p \in F (p \subset U_\beta)\}.$$

F центрировано $\implies$ $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. F пересекает все D_α $\implies$ A неограничено в ω_1, а значит, несчётно. ■

Следствие 1 (MA + ¬CH). *Топологическое произведение любого семейства пространств со свойством Суслина обладает свойством Суслина.*

Доказательство. В силу теоремы о свойстве Суслина топологического произведения, все конечные подпроизведения которого обладают свойством Суслина, достаточно проверить, что если X и Y — два топологических пространства со свойством Суслина, то $X \times Y$ обладает свойством Суслина.

Пусть $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $X \times Y$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем непустые открытые множества U_α в X и V_α в Y, удовлетворяющие условию $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Пользуясь теоремой, найдём несчётное $A \subset \omega_1$, для которого $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Семейство $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ не может состоять из попарно непересекающихся множеств, так как Y обладает свойством Суслина. Пусть $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Поскольку $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ (в силу центрированности), имеем

$$W_\alpha \cap W_\beta \supset (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) \neq \varnothing.$$

■

Следствие 2 (MA + ¬CH). *Прямых Суслина не существует.*