Лемма о Δ-системе. *Для любого несчётного семейства $\mathscr{F}$ конечных множеств найдутся несчётное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ и (конечное, возможно, пустое) множество R такие, что $X \cap Y = R$ для любых $X, Y \in \mathscr{F}'$.*

Ясно, что $R = \bigcap \mathscr{F}'$. Любое семейство $\mathscr{F}'$ с указанным в формулировке леммы свойством ($X \cap Y = \bigcap \mathscr{F}'$ для любых $X, Y \in \mathscr{F}'$) называется Δ-*системой*, а множество $R = \bigcap \mathscr{F}'$ называется её Δ-*корнем*.

Набросок доказательства. Лемму о Δ-системе проще всего доказывать методом индукции (обычной, не трансфинитной) — надо заметить, что любое несчётное семейство конечных множеств содержит несчётное подсемейство, состоящее из множеств некоторого одинакового размера n, а тогда можно считать, что уже само данное семейство $\mathscr{F}$ состоит из множеств размера n и применить индукцию по n. Для $n = 0$ доказывать нечего. Предположим, что $n > 0$ и для семейств множеств меньшего размера утверждение верно. Воспользовавшись теоремой Цермело, вполне упорядочим множество $\bigcup \mathscr{F}$ каким-нибудь отношением $\leq$. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ обозначим через $\min F$ $\leq$-наименьший элемент F, а через $\max F$ — $\leq$-наибольший элемент F (он существует в силу конечности F).

Если найдётся $x \in \bigcup \mathscr{F}$, для которого семейство $\tilde{\mathscr{F}} = \{F \in \mathscr{F} : \min F = x\}$ несчётно, то для каждого $F \in \tilde{\mathscr{F}}$ положим $\hat{F} = F \setminus \{x\}$ и получим несчетное семейство $\hat{\mathscr{F}} = \{\hat{F} : F \in \tilde{\mathscr{F}}\}$, к которому применимо индуктивное предположение. Пусть $\hat{\mathscr{F}}' \subset \hat{\mathscr{F}}$ — несчётная Δ-система (с Δ-корнем $\bigcap \hat{\mathscr{F}}'$). Положив $\mathscr{F}' = \{F \in \tilde{\mathscr{F}} : \hat{F} \in \hat{\mathscr{F}}'\}$, получим несчётную Δ-систему с Δ-корнем $\bigcap \hat{\mathscr{F}}' \cup \{x\}$, причём $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

Если же такого элемента x нет, то, как-нибудь вполне упорядочив уже само́ семейство $\mathscr{F}$ и применив трансфинитную рекурсию, легко построить несчётное семейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ с тем свойством, что для любых $F, G \in \mathscr{F}'$ либо $\max F < \min G$, либо $\min F > \max G$. Ясно, что $\mathscr{F}'$ — Δ-система с пустым Δ-корнем. ∎