Топологические произведения

Декартово произведение семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Элемент $f\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α. При этом x_α называется *α-й координатой* элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Канонической проекцией произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная *топология произведения* — в ней открыты всевозможные объединения множеств вида

$$U \times V, \qquad \text{где } U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y.$$

Топологическим произведением, или просто *произведением*, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Тихоновская топология, или *топология произведения*, на декартовом произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произвольного семейства топологических пространств — это самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны.

Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются *топологическими*, или *тихоновскими, произведениями*. Открытые множества — всевозможные объединения множеств вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α.

В теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f\colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.