Паракомпактные пространства

Определение. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X *локально конечно*, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$.

Определение. Топологическое пространство *паракомпактно*, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются *паракомпактами*.

Замечание 1. Паракомпактность действительно является обобщением компактности, потому что, как легко увидеть, из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие тогда и только тогда, когда в него можно вписать конечное покрытие.

Прежде чем переходить к свойствам паракомпактных пространств, отметим одно уникальное чрезвычайно удобное свойство локально конечных семейств множеств.

Определение. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X называется *консервативным*, если для всякого $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ имеет место равенство $\bigcup_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} = \overline{\bigcup_{F \in \mathscr{F}'} F}$.

Предложение 1. *Каждое локально конечное семейство консервативно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — локально конечное семейство подмножеств топологического пространства X, и пусть $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Включение $\bigcup_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} \subset \overline{\bigcup_{F \in \mathscr{F}'} F}$ следует из монотонности оператора замыкания. Проверим обратное включение. Пусть $x \notin \bigcup_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F}$, и пусть U — окрестность точки x, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$, а значит, и семейства $\mathscr{F}'$. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — все элементы семейства $\mathscr{F}'$, пересекающие U. Положим $V = U \setminus (\overline{F}_1 \cup \dots \cup \overline{F}_n)$. Очевидно, V — окрестность точки x и $V \cap \left(\bigcup_{F \in \mathscr{F}'} F\right) = \varnothing$. ■

Переходим к свойствам паракомпактных пространств.

Теорема 1. *Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — паракомпакт. Сначала покажем, что X регулярно.

Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \in X \setminus F$. В силу хаусдорфовости X у всякой точки $y \in F$ существует открытая окрестность U_y со свойством $x \notin \overline{U}_y$. Семейство $\{X \setminus F\} \cup \{U_y : y \in F\}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. Положим $V = \bigcup \{V_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. Это открытая окрестность множества F. В силу консервативности локально конечных семейств имеем $\overline{V} = \bigcup \{\overline{V}_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. Но всякое V_α, пересекающее F, содержится в некотором U_y, и $x \notin \overline{U}_y$. Значит, из того, что $V_\alpha \cap F \neq \varnothing$, следует, что $x \notin \overline{V}_\alpha$. Поэтому $x \notin \overline{V}$.

Нормальность доказывается аналогично. Пусть F и G — непересекающиеся замкнутые подпространства пространства X. Поскольку X регулярно, у всякой точки $y \in G$ есть открытая окрестность U_y, замыкание которой не пересекается с F. Рассматривая открытое покрытие $\{X \setminus G\} \cup \{U_y : y \in G\}$, мы так же, как и выше, получаем окрестность V множества G, замыкание которой не пересекается с F. Открытые множества $X \setminus \overline{V}$ и V не пересекаются и содержат F и G соответственно. ■

Теорема 2. *Паракомпактность наследуется замкнутыми подпространствами.*

Доказательство. Пусть X — паракомпактное пространство, Y — его замкнутое подпространство и $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства Y. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём такое открытое в X множество $U_\alpha \subset X$, что $U_\alpha \cap Y = V_\alpha$. Семейство $\mathscr{U} = \{X \setminus Y\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть $\{W_\beta : \beta \in B\}$ — вписанное в него локально конечное покрытие X. Тогда $\{W_\beta \cap Y : \beta \in B\}$ — открытое покрытие пространства Y, причём, очевидно, оно вписано в $\mathscr{V}$ и локально конечно. ■

Паракомпактность является важнейшим топологическим свойством хотя бы потому, что она предоставляет незаменимый инструмент теории многообразий — разбиения единицы. Разбиения единицы используются для определения интегралов и римановых метрик на многообразиях, вложения топологических многообразий в евклидовы пространства, аппроксимации функций и во многих других конструкциях.

Определение. Семейство $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ непрерывных функций из топологического пространства X в $[0,1]$ называется *разбиением единицы* на X, если для каждого $x \in X$ значения $f_\alpha(x)$ отличны от нуля лишь для конечного числа[1] индексов α и $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$.

Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ на X *подчинено покрытию* $\mathscr{C}$ пространства X, если покрытие $\mathscr{F} = \big\{ f_\alpha^{-1}\big((0,1]\big) : \alpha \in A \big\}$ вписано в $\mathscr{C}$. Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *локально конечно*, если покрытие $\mathscr{F}$ локально конечно.

Предложение 2. *В любое открытое локально конечное покрытие $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ паракомпакта X можно комбинаторно вписать[2] локально конечное открытое покрытие $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ так, что $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.*

Доказательство. Поскольку X регулярно, мы можем найти у каждой точки $x \in X$ открытую окрестность, замыкание которой содержится в каком-то элементе покрытия $\mathscr{U}$ (которому принадлежит точка x), и получить тем самым открытое покрытие $\mathscr{W}$ с тем свойством, что покрытие $\{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$ вписано в $\mathscr{U}$. Возьмём локально конечное открытое покрытие $\{O_\beta : \beta \in B\}$, вписанное в $\mathscr{W}$. Для каждого $\beta \in B$ выберем $\alpha(\beta) \in A$ такое, что $\overline{O}_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. Для $\alpha \in A$ положим $V_\alpha = \bigcup\{O_\beta : \alpha(\beta) = \alpha\}$, если существует $\beta \in \alpha$, для которого $\alpha = \alpha(\beta)$, и $V_\alpha = \varnothing$, если такого β не существует. Очевидно, $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства X. В силу консервативности[3] покрытия $\{O_\beta : \beta \in B\}$ имеем $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} \overline{O}_\beta \subset U_\alpha$. Осталось заметить, что любое семейство, комбинаторно вписанное в локально конечное семейство, и само локально конечно. ∎

Теорема 3. *Если X — паракомпакт, то для каждого открытого покрытия пространства X найдётся подчинённое ему локально конечное разбиение единицы.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}$ — любое открытое покрытие пространства X, и пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. По предложению 2 существует покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ пространства X замкнутыми множествами с тем свойством, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Пользуясь леммой Урысона, для каждого $\alpha \in A$ найдём непрерывную функцию $g_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $g_\alpha(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\alpha$ и $g_\alpha|_{F_\alpha} \equiv 1$. Полагая $g(x) = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$, мы получим непрерывную функцию $X \to \mathbb{R}$, потому что покрытие $\mathscr{U}$ локально конечно, а значит, у каждой точки $x \in X$ имеется окрестность, в которой g есть сумма конечного числа непрерывных функций и потому непрерывна, откуда немедленно вытекает непрерывность функции g в точке x. Искомое разбиение единицы — это $\big\{ \frac{g_\alpha}{g} : \alpha \in A \big\}$. ∎

Теорема (Стоун). *Всякое метризуемое пространство паракомпактно.*

(Доказательство трудное, и мы его не приводим.)

[1] Иногда требуют, чтобы значения значения $f_\alpha(x)$ были отличны от нуля для не более чем счётного числа индексов α и ряд $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$ сходился к 1.

[2] См. определение в конспекте к вопросу 13.

[3] См. предложение 1.

Финально компактные и линделёфовы пространства

Одно из самых естественных обобщений компактности получается, если заменить требование существования конечного подпокрытия в каждом открытом покрытии требованием существования подпокрытия не слишком большой мощности. Такой подход сразу же подводит к новому кардинальному инварианту.

Определение. Для топологического пространства X кардинал

$$l(X) = \min\{\text{кардинал } \kappa\text{: любое открытое покрытие пространства } X \text{ имеет подпокрытие мощности, не превосходящей } \kappa\}$$

называется *числом Линделёфа* пространства X.

Топологическое пространство X, для которого $l(X) \leqslant \aleph_0$, называется *финально компактным*. Регулярные финально компактные пространства называются *линделёфовыми.*

Замечание 2. Очевидно, все пространства со счётной базой финально компактны.

Замечание 3. Следующие свойства финально компактных пространств без труда доказываются по аналогии с подобными свойствами компактных пространств.

- *Пространство финально компактно тогда и только тогда, когда каждое счётно центрированное*[1] *семейство замкнутых множеств в нём имеет непустое пересечение.*
- *Финальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.*
- *Любое несчётное множество в финально компактном пространстве имеет точку накопления. Другими словами, финально компактное пространство не содержит несчётных замкнутых дискретных подпространств.*
- *Финальная компактность сохраняется непрерывными отображениями.*

Теорема 4. *Все линделёфовы пространства паракомпактны.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие линделёфова пространства X. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем какой-нибудь содержащий её элемент U_x покрытия $\mathscr{U}$ и найдём, пользуясь регулярностью пространства X, открытое множество $V_x \subset X$ с тем свойством, что $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x \in \mathscr{U}$. Пусть $\{V_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ — счётное подпокрытие покрытия $\{V_x : x \in X\}$. Очевидно, семейство $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ тоже является покрытием пространства X. Множества

$$W_1 = U_{x_1} \quad \text{и} \quad W_{i+1} = U_{x_{i+1}} \setminus \big(\overline{V}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{x_i}\big), \quad i \in \mathbb{N},$$

открыты и покрывают X: каждая точка $x \in X$ содержится в $W_{i(x)}$, где $i(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in U_{x_n}\}$. Покрытие $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ вписано в $\mathscr{U}$ (потому что каждое W_i содержится в $U_{x_i} \in \mathscr{U}$) и локально конечно, так как каждая точка $x \in X$ содержится в открытом множестве V_{x_j} для некоторого j и $V_{x_j} \cap W_i = \varnothing$ для $i > j$. ■

Следствие 1. *Все линделёфовы пространства нормальны.*

[1] т.е. семейство, любое счётное подсемейство которого имеет непустое пересечение.