Гипотеза Суслина

Пусть $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, и пусть $L, R \subset X$, причём $L \cup R = X$ и $L < R$ (т.е. $x < y$ для любых $x \in L$ и $y \in R$). Пара L, R называется

- *скачком*, если существуют $\max L \in L$ и $\min R \in R$;
- *дедекиндовым сечением*, если не существует $\min R$;
- *щелью*, если не существуют $\min R$ и $\max L$.

Пусть (L, R) и (L', R') — дедекиндовы сечения. Будем писать $(L, R) \leq (L', R')$, если $L \subset L'$. Множество $\widehat{X}$ всех дедекиндовых сечений, так упорядоченное, не содержит щелей и содержит X (каждый элемент X отождествляется с (L_x, R_x), где $L_x = \{y \in X : y \leq x\}$ и $R_x = \{y \in X : x < y\}$). При этом X *плотно* в $\widehat{X}$, т.е. любой непустой интервал в $\widehat{X}$ содержит точку из X. Множество $\widehat{X}$ называется *дедекиндовым пополнением* линейно упорядоченного множества X.

Линейно упорядоченное множество X *связно*, если в нём нет скачков и щелей. Дедекиндово пополнение любого множества, в котором нет скачков, связно.

На каждом линейно упорядоченном множестве $(X, \leq)$ естественно возникает *порядковая топология* $\mathscr{T}$: множество открыто $\iff$ оно является объединением произвольного семейства открытых интервалов. Множество $Y \subset X$ плотно в X относительно этой топологии (т.е. его замыкание clY совпадает с X) $\iff$ Y плотно в X в смысле порядка. Топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ связно (т.е. его нельзя представить как объединение непересекающихся непустых открытых множеств) $\iff$ $(X, \leq)$ связно в смысле порядка.

Вещественная прямая $\mathbb{R}$ — дедекиндово пополнение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Она связна и *сепарабельна* (т.е. содержит счётное всюду плотное множество). Кроме того, в $\mathbb{R}$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Хорошо известно и нетрудно показать, что всякое линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,
- сепарабельно

порядково изоморфно прямой $\mathbb{R}$.

Определение 1. Топологическое пространство обладает *свойством Суслина*, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

Замечание 1.

1. Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.
2. Топология $\mathscr{T}$ (семейство всех открытых множеств) любого топологического пространства X частично упорядочена отношением $\subset$. Пространство X обладает свойством Суслина $\iff$ $\mathscr{T}$ удовлетворяет условию счётности цепей.

Определение 2. *Прямая Суслина* — это несепарабельное линейно упорядоченное пространство со свойством Суслина.

Гипотеза Суслина — это утверждение «прямых Суслина не существует». Обозначение: *SH*.

Предложение 1. *Квадрат прямой Суслина не обладает свойством Суслина.*

Доказательство. Пусть $(X, \leq)$ — прямая Суслина. Индукцией по α найдём точки $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$, $\alpha < \omega_1$, со свойствами

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;
2. $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \varnothing$ и $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \varnothing$;
3. $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \varnothing$.

Пусть I — множество всех изолированных точек в X. Оно счётно, так как X обладает свойством Суслина и $\{x\}$ открыто для каждого $x \in I$. Выберем любые $a_0, b_0, c_0 \in X$ со свойствами 1 и 2.

Пусть $\alpha < \omega_1$ и $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ уже построены для всех $\beta < \alpha$. X не сепарабельно $\implies$ множество $X \backslash \mathrm{cl}\, I \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ содержит непустой интервал (a_α, c_α).

Он бесконечен (изолированные точки исключены) $\implies \exists\, b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ со свойством 2.

Множества $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ непусты, открыты и попарно не пересекаются: если $\beta < \alpha$, то либо $b_\beta \leq a_\alpha$, либо $b_\beta \geq c_\alpha$, т.е. либо $(a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \varnothing)$, либо $(b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \varnothing$. ∎

Принцип Йенсена

Определение 3. Пусть κ — кардинал. Множество $X \subset \kappa$ *стационарно*, если оно пересекается с каждым замкнутым (в порядковой = интервальной топологии) неограниченным множеством $A \subset \kappa$.

Для $\kappa = \omega_1$ неограниченность = несчётность.

Теорема 1 (Принцип Йенсена ($\Diamond$)). *Существуют множества $A_\alpha \subset \alpha$, $\alpha < \omega_1$, такие, что*

$$\forall A \subset \omega_1 \text{ множество } \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ стационарно.}$$

Последовательность $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ называется $\Diamond$-последовательностью.

Теорема 2. *Принцип Йенсена $\Diamond$ нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках теории ZFC.*

Другими словами, оба утверждения $\Diamond$ и $\neg\Diamond$ *совместимы* с ZFC; в такой ситуации говорят также, что $\neg\Diamond$ *не зависит* от ZFC.

$\Diamond \implies$ CH: если $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\Diamond$-последовательность, то $\forall A \subset \omega \, \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha)$, откуда $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathscr{P}(\omega)$.

Из $\Diamond$ следует также существование прямой Суслина.

В дальнейшем будет показано, что из другого теоретико-множественного предположения (аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы) вытекает несуществование прямой Суслина.