Определение 1. Семейство $\mathscr{N}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью*[1] этого пространства, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдётся $N \in \mathscr{N}$, для которого $x \in N \subset U$. Определение сети отличается от определения базы лишь тем, что элементы сети не обязаны быть открытыми (таким образом, всякая база является сетью). *Сетевой вес* $nw(X)$ пространства X определяется, по аналогии с весом, как наименьшая мощность сети в X.

Теорема 1. *Для всякого хаусдорфова пространства X существует непрерывное взаимно однозначное отображение этого пространства на хаусдорфово пространство Y со свойством $w(Y) \leqslant nw(X)$.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — хаусдорфово пространство сетевого веса $nw(X) = \kappa$, и пусть $\mathscr{N}$ — сеть пространства X мощности κ.

Легко проверить, что если $\kappa < \aleph_0$, то X дискретно, так что все множества в нём открыты и сеть является базой.

Предположим, что $\kappa \geqslant \aleph_0$; тогда, очевидно, X бесконечно. Поскольку X хаусдорфово, для каждой пары разных точек $x, y \in X$ найдутся отделённые окрестностями элементы $N_{x,y} \ni x$ и $M_{x,y} \ni y$ сети $\mathscr{N}$. Зафиксируем эти элементы, а также какие-нибудь их непересекающиеся открытые окрестности $U_{x,y} \supset N_{x,y}$ и $V_{x,y} \supset M_{x,y}$, зависящие только от $N_{x,y}$ и $M_{x,y}$, но не от пары (x, y). Положим
$$\mathscr{B} = \{U_{x,y} : x, y \in X, x \neq y\} \cup \{V_{x,y} : x, y \in X, x \neq y\}.$$
Очевидно, семейство $\mathscr{B}$ покрывает пространство X, поэтому оно является предбазой некоторой топологии $\mathscr{T}'$ на X. Положим $Y = (X, \mathscr{T}')$. Мощность базы топологии $\mathscr{T}'$, состоящей из конечных пересечений элементов предбазы $\mathscr{B}$, равна мощности предбазы $\mathscr{B}$, которая, в свою очередь, не превосходит $|\mathscr{N} \times \mathscr{N}| = |\mathscr{N}| = nw(X)$. Значит, $w(Y) \leqslant nw(X)$. Кроме того, по построению любые разные точки пространства X содержатся в непересекающихся элементах семейства $\mathscr{B}$, поэтому $Y = (X, \mathscr{T}')$ хаусдорфово. Наконец, очевидно, $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$, поэтому тождественное отображение $(X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T}') = Y$ непрерывно. ■

Следствие 1. *Для любого компакта X имеет место равенство $w(X) = nw(X)$.*

Следствие 2. *Всякий компакт имеет базу, мощность которой не превосходит мощности этого компакта.*

Замечание 1. Доказанная теорема верна и для локально компактных хаусдорфовых пространств — достаточно рассмотреть одноточечную компактификацию αX такого пространства X, вспомнить, что вес компактификации αX равен весу пространства X, и заметить, что любую сеть пространства X можно превратить в сеть пространства αX добавлением ещё одного (одноточечного) элемента — компактифицирующей точки.

Определение 2. *Псевдохарактер* T_1-пространства X с топологией $\mathscr{T}$ в точке $x \in X$ — это кардинал
$$\psi(x, X) = \min\bigl\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subset \mathscr{T},\ \bigcap\mathscr{U} = \{x\}\bigr\}.$$
Наименьший кардинал κ с тем свойством, что $\psi(x, X) \leqslant \kappa$ для всех точек $x \in X$, называется *псевдохарактером* пространства X и обозначается $\psi(X)$:
$$\psi(X) = \sup\bigl\{\psi(x, X) : x \in X\bigr\}.$$

[1] Понятие сети не следует путать с понятием ε-сети!

Теорема 2. *Характер компактного хаусдорфова пространства в любой точке равен его псевдохарактеру в этой точке.*

Доказательство. Пусть X — компактное хаусдорфово (а значит, и регулярное) пространство и $x \in X$. Ясно, что $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$, так что нам надо доказать, что $\psi(x, X) \geqslant \chi(x, X)$. Случай $\psi(x, X) < \aleph_0$ очевиден (в этом случае $\psi(x, X) = \chi(x, X) = 1$), поэтому будем считать, что $\psi(x, X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Пусть U_α, $\alpha < \kappa$, — открытые подмножества пространства X и $\{x\} = \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Для каждого $\alpha < \kappa$ найдём открытую окрестность $V_\alpha \subset W$ точки x, для которой $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Ясно, что $\bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \{x\}$ и все V_α имеют компактное замыкание. Возьмём любую открытую окрестность U точки x. Множества $(X \setminus U) \setminus \overline{V}_\alpha$, $\alpha < \kappa$, образуют открытое покрытие компакта $X \setminus U$. Оно содержит конечное подпокрытие $\{(X \setminus U) \setminus \overline{V}_{\alpha_i} : i = 1, \dots, n\}$. Имеем $\overline{V}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \overline{V}_{\alpha_n} \subset$ $\subset U$; значит, $V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \subset U$. Таким образом, любая открытая окрестность U точки x содержит конечное пересечение элементов семейства $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$, т.е. все такие конечные пересечения образуют базу открытых окрестностей точки x. Осталось заметить, что мощность множества всех этих пересечений равна κ. ■

Замечание 2. Доказанная теорема верна и для локально компактных хаусдорфовых пространств — надо рассматривать покрытие

не множества $X \setminus U$, а множество $\overline{W} \setminus U$, где U — окрестность точки x с компактным замыканием.

Теорема 3. *Мощность любого несчётного компакта $K \subset \mathbb{R}$ не меньше $2^{\aleph_0}$.*

Доказательство. Сначала заметим, что у всякого несчётного множества K в $\mathbb{R}$ имеются как минимум две *точки конденсации* — это такие точки $x \in \mathbb{R}$, что $U \cap K$ несчётно для всякой окрестности x. Действительно, возьмём любую точку $a \in K$ и предположим, что каждая точка $x \in K \setminus \{a\}$ имеет окрестность U_x, для которой $U \cap K$ не более чем счётно; ясно, что такие окрестности U_x можно выбрать в счётной базе $\mathscr{B}$ топологии прямой $\mathbb{R}$. Заметим, что $K \setminus \{a\} \subset \bigcup\{U_x \cap K : x \in K \setminus \{a\}\}$, причём число разных множеств $U_x \cap K$ не более чем счётно и каждое из этих множеств тоже не более чем счётно. Значит, $|K \setminus \{a\}| \leqslant \aleph_0$, что противоречит несчётности множества K.

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — несчётный компакт. Возьмём две его разные точки конденсации, a и b. Теперь выберем два открытых интервала $(a_0, b_0) \ni a$ и $(a_1, b_1) \ni b$ с непересекающимися замыканиями и положим $I_0 = [a_0, b_0] \cap K$ и $I_1 = [a_1, b_1] \cap K$. Заметим, что I_0 и I_1 — несчётные компактные подмножества прямой, и повторим процедуру для каждого из них, получив две пары непересекающихся несчётных компактов $I_{00}, I_{01} \subset I_0$ и $I_{10}, I_{11} \subset I_1$. Дальше будем действовать так же: на n-м шаге, имея попарно непересекающиеся несчётные компакты $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ для всех наборов $i_1 i_2 \dots i_n$ нулей и единиц, мы будем в каждый из них вписывать по два непересекающихся несчётных компакта $I_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ и $I_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$.

Потом положим $C_n = \bigcup\{I_{i_1 i_2 \dots i_n} : i_j \in \{0, 1\}$ для $j \leqslant n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и заметим, что множество $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$ и содержится в K. ■

В заключение сформулируем без доказательства еще одну теорему:

Теорема 4 (А. В. Архангельский). *Мощность любого компакта с первой аксиомой счётности равна $2^{\aleph_0}$.*