Теорема 1. *Всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, $K \subset X$ — его компактное подпространство и $x \notin K$. Имеем $\bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность точки $x\} = \{x\}$, и, поскольку $x \notin K$, семейство

$$\mathscr{U} = \{X \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

представляет собой открытое покрытие компакта K. Пусть $\{X \setminus \overline{U}_1, \dots, X \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда множество $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки x, не пересекающая K, а это означает, что $x \notin \overline{K}$. Следовательно, $\overline{K} = K$, т.е. множество K замкнуто. ∎

В дополнительном предположении регулярности верно и обратное:

Теорема 2. *Если регулярное пространство X замкнуто в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве $Y \supset X$, то оно компактно.*

Доказательство. Пусть X — некомпактное регулярное пространство и $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — его открытое покрытие, которое не содержит конечного подпокрытия. Для каждой точки $x \in X$ выберем какой-нибудь элемент $U_\alpha \ni x$ покрытия и открытую окрестность V_x этой точки, для которой $\overline{V}_x \subset U_\alpha$. Легко видеть, что ни для какого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ не выполнено условие $\overline{V}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{x_n} = X$. Рассмотрим пространство $Y = X \cup \{y^*\}$, в котором базы окрестностей точек $x \in X$ те же, что и в пространстве X, а базу окрестностей точки y^* составляют множества вида $\{y^*\} \cup X \setminus (\overline{V}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{x_n})$, где $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in X$. Ясно, что Y хаусдорфово и содержит X в качестве незамкнутого подпространства. ∎

Теорема 3. *Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $X \subset K$ — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств пространства X. Поскольку X замкнуто в K, $\mathscr{F}$ является также и центрированным семейством замкнутых подмножеств K, так что $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. ∎

Теорема 4. *Всякий непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $f\colon K \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X. Очевидно, $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ — открытое покрытие пространства K. Оно содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, и $\{U_1, \dots, U_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. ∎

Следствие 1. *Всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто (т.е. переводит замкнутые множества в замкнутые).*

Доказательство. Пусть $f\colon K \to X$ — непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово. Любое замкнутое множество $F \subset K$ компактно, а образ любого компактного множества компактен и, значит, замкнут в X (поскольку X хаусдорфово); следовательно, отображение f замкнуто. ∎

Следствие 2. *Любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

Это следствие можно сформулировать по-другому: *если K — компакт с топологией $\mathscr{T}$, то любая хаусдорфова топология на K, более слабая, чем $\mathscr{T}$, совпадает с $\mathscr{T}$.* Другими словами, *топологию компакта нельзя ослабить.*