Пусть S — полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция непрерывна (например, дискретной). Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s\colon S \to S \quad (\subset \beta S)$$

правилом

$$L_s(x) = s \cdot x \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{L}_s\colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $s \cdot p$.

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q\colon S \to \beta S,$$

определённое правилом

$$R_q(x) = x \cdot q \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q\colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот элемент пространства βS называется *произведением ультрафильтров* p и q в βS.

Определённая таким образом операция (умножение) $\beta S \times \beta S \to \beta S$ непрерывно по первому аргументу, а если первый аргумент — элемент S, то и по второму. Нетрудно показать, что из этих непрерывностей вытекает ассоциативность. Таким образом, βS с этим умножением — полугруппа с компактной хаусдорфовой топологией, относительно которой умножение непрерывно по первому аргументу.

Теорема 1 (Эллис–Нумакура). *Любая непустая компактная хаусдорфова правотопологическая (= умножение непрерывно по первому аргументу) полугруппа S содержит идемпотент, т.е. элемент e такой, что $e \cdot e = e$.*

Доказательство (для особо любознательных). К упорядоченному семейству $(\mathscr{H}, \leqslant)$, где $\leqslant = \supset$, непустых замкнутых подполугрупп S применима лемма Цорна. Действительно, пусть множество $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ линейно упорядочено отношением $\supset$. Элементы любого конечного подмножества этого множества можно перенумеровать в порядке $\leqslant$-возрастания, т.е. $\subset$-убывания: $H_1 \supset \cdots \supset H_n$. Имеем $\bigcap_{i \leqslant n} H_i = H_n \neq \varnothing$. Значит, любое такое множество $\mathscr{C}$ центрировано. Поскольку все $H \in \mathscr{C}$ замкнуты, а полугруппа S компактна, имеем $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$. Ясно, что это пересечение замкнуто и является подполугруппой, т.е. принадлежит семейству $\mathscr{H}$. Кроме того, оно больше (относительно порядка $\leqslant$) всех элементов множества $\mathscr{C}$. Значит, это верхняя грань множества $\mathscr{C}$.

Пусть H — $\leqslant$-максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент $\mathscr{H}$ и $e \in H$. Тогда $H \cdot e$ — подполугруппа: $x \cdot e \cdot y \cdot e = (x \cdot e \cdot y) \cdot e$, причём $x \cdot e \cdot y \in H$, так как H — подполугруппа. Кроме того, $H \cdot e \subset H$ (по той же причине). Подполугруппа $H \cdot e$ — образ подполугруппы H при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Подполугруппа H компактна, будучи замкнутым подмножеством компактного пространства S. Значит, $H \cdot e$ тоже компактна. Полугруппа S хаусдорфова, а в хаусдорфовом пространстве все компактные подмножества замкнуты. Следовательно, подполугруппа $H \cdot e$ замкнута, и из её минимальности следует, что $H \cdot e = H$.

Положим
$$E = \{x \in H : x \cdot e = e\}.$$
Множество E непусто и является подполугруппой (если $x, y \in H$, т.е. $x \cdot e = y \cdot e = e$, то $(x \cdot y) \cdot e = x \cdot (y \cdot e) = x \cdot e = e$). Множество E — прообраз замкнутого множества $\{e\}$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Следовательно, это замкнутая подполугруппа полугруппы S. Из того, что $E \subset H$ и минимальности подполугруппы H следует, что $E = H$. Значит, $e \in E$, т.е. $e \cdot e = e$. ∎

Теорема 2. *Любая непустая компактная хаусдорфова правотопологическая (= умножение непрерывно по первому аргументу) полугруппа S содержит минимальный (по включению) левый идеал, т.е. множество L такое, что $S \cdot L \subset L$, причём все такие идеалы замкнуты.*

Можно показать, что если S — дискретная полугруппа, то βS — это множество всех ультрафильтров на S с топологией, базой которой является семейство $\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subset S\}$, где для $A \subset S$ положим
$$\overline{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}.$$

Множество S отождествляется с подпространством пространства βS, состоящим из главных ультрафильтров:
$$S \ni x \equiv p_x = \{A \subset S : x \in A\}.$$

С помощью ультрафильтров-идемпотентов и минимальных идеалов легко доказываются теоремы рамсеевской комбинаторики (о раскрасках), например, известная теорема ван дер Вардена о том, что при любой раскраске множества (полугруппы) натуральных чисел в конечное число цветов найдётся одноцветное множество, содержащее сколь угодно длинные арифметические и геометрические прогрессии, а также новые подобные теоремы. Кроме того, они играют важную роль в топологической динамике, поскольку действие дискретной полугруппы S на компакте (которое определяет динамическую систему) можно продолжить до действия компактной полугруппы βS.

Компактификации используются также для доказательства замкнутости тихоновских пространств в объемлющих пространствах. Например, для каждого тихоновского пространства X существует свободная топологическая группа $F(X)$. (*Топологическая группа* — это группа с топологией, относительно которой умножение и возведение в степень -1 непрерывны; такая топология называется *групповой*.) Это свободная группа с базисом X, снабжённая самой сильной групповой топологией с тем свойством, что X содержится в $F(X)$ в качестве подпространства. Другими словами, это такая групповая топология, что X — подпространство $F(X)$ и любое непрерывное отображение $f\colon X \to G$ в топологическую группу G продолжается до непрерывного гомоморфизма $F(X) \to G$. Существование свободной топологической группы доказывается по той же схеме, что и существование максимальной компактификации — надо взять всевозможные непрерывные отображения $\varphi_\alpha\colon X \to G_\alpha$ в топологические группы; диагональное произведение $\Phi = \Delta\, \varphi_\alpha\colon X \to \prod G_\alpha$ вкладывает X в топологическую группу $\prod G_\alpha$, и групповая оболочка множества $\Phi(X)$ в этой группе — это $F(X)$.

Как абстрактная группа (без топологии) $F(X)$ — это множество несократимых слов, т.е. формальных выражений вида $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ (единица — пустое слово) с естественными операциями умножения и возведения в степень -1. Для $k \in \mathbb{N}$ положим
$$F_k(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : n \leqslant k, x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определено естественное отображение умножения
$$j_n\colon (X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^n \to F_n(X),$$

где X^{-1} — гомеоморфная копия пространства X и e — точка, которой при отображении умножения соответствует единица группы $F(X)$:

$$j_n(y_1, \dots, y_n) = y_1 \dots y_n \qquad \text{(произведение однобуквенных слов } y_i, \text{ среди которых может быть единица, в группе } F(X).)$$

Из непрерывности групповых операций вытекает непрерывность всех отображений j_n.

Возьмём любую компактификацию K пространства X. Множество X порождает в свободной топологической группе $F(K)$ топологическую подгруппу $\langle X \rangle$. Как абстрактная группа она является свободной группой с базисом X, и она содержит X в качестве подпространства, однако топология на ней может быть слабее топологии свободной топологической группы.

Заметим, что все множества $F_n(K)$ компактны, будучи непрерывными образами компактов при непрерывных отображениях j_n. Значит, они замкнуты в $F(K)$. Следовательно, множества $F_n(X) = F_n(K) \cap \langle X \rangle$ замкнуты в $\langle X \rangle$ и тем более в $F(X)$, так как там топология сильнее.

Кроме того, сужения отображений j_n на K^n, очевидно, инъективны. Значит, они осуществляют гомеоморфное вложение компактов K^n (и их подпространств X^n) в $F(K)$ (в $\langle X \rangle$) в качестве замкнутых подпространств. Из того, что отображения $j_n|_{X^n} \colon X_n \to F(X)$ непрерывны и относительно топологии свободной топологической группы, следует, что X^n вкладывается в $F(X)$ в качестве замкнутого подпространства для всякого n.