Компактность в классе метризуемых пространств

Теорема

Всякий метризуемый компакт удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Лемма

Если в метризуемом пространстве всякое замкнутое дискретное множество не более чем счётно, то это пространство обладает свойством Суслина.

Доказательство. Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — несчётное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств в X. Каждое U_α содержит некоторый шар $B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha})$, где $x_\alpha \in X$ и $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathscr{U}$ несчётно, а $\mathbb{N}$ счётно, найдутся $n \in \mathbb{N}$ и несчётное $A' \subset A$ такие, что $n_\alpha = n$ для всех $\alpha \in A'$. Окрестность $B_d(x, \frac{1}{n})$ любой точки $x \in X$ содержит не больше одного элемента множества $Y = \{x_\alpha : \alpha \in A'\}$, поскольку $x_\alpha \in B_d(x, \frac{1}{n}) \iff x \in B_d(x_\alpha, \frac{1}{n})$, причём $n = n_\alpha$ для $\alpha \in A'$ и семейство $\{B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha}) : \alpha \in A'\}$ дизъюнктно. Следовательно, несчётное множество Y замкнуто и дискретно в противоречие с предположением. $\square$

Доказательство теоремы. Достаточно показать, что любой метризуемый компакт обладает свойством Суслина, а это вытекает из доказанной леммы и того, что любое замкнутое дискретное множество в компактном пространстве само компактно и потому не может быть бесконечным, тем более, несчётным. □

Теорема

Для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:

1. *X компактно;*
2. *любая непрерывная функция на X ограничена;*
3. *любое бесконечное множество в X имеет предельную точку;*
4. *любая последовательность точек пространства X содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть d — какая-нибудь метрика, порождающая его топологию. Мы будем доказывать теорему по схеме 1$\Rightarrow$2$\Rightarrow$3$\Rightarrow$4$\Rightarrow$3$\Rightarrow$1.

Импликация 1$\Rightarrow$2 уже была доказана. Покажем, что 2$\Rightarrow$3. Пусть Y — бесконечное подмножество X без предельных точек. Тогда Y замкнуто и дискретно. Значит, всякое отображение из $Y \subset X$ в любое пространство непрерывно. Поскольку Y бесконечно, существует неограниченная функция $f\colon Y \to \mathbb{R}$. Пространство X нормально, будучи метризуемым. По теореме Титце–Урысона функция f продолжается до непрерывной функции $\hat{f}$ на X.

Докажем импликацию 3$\Rightarrow$4. Пусть $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность точек X. Если множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ её значений конечно, то она содержит постоянную подпоследовательность, которая сходится. Пусть множество значений бесконечно и x — его предельная точка. 1-Окрестность x содержит бесконечно много точек x_n. Выберем какую-нибудь из них. Пусть это x_{k_1}. В $\frac{1}{2}$-окрестности точки x выберем точку x_{k_2} с номером $k_2 > k_1$. Продолжая в том же духе, мы получим подпоследовательность $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с тем свойством, что для каждого n $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Ясно, что $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Обратная импликация 4$\Rightarrow$3 очевидна — любое бесконечное множество содержит счётное множество, а точки счётного множества можно занумеровать натуральными числами, так что получится последовательность. Предел любой сходящейся подпоследовательности этой последовательности будет предельной точкой данного бесконечного множества.

Докажем, что ❸⇒❶. Пусть X удовлетворяет условию ❸; это означает, что X не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств, а значит, обладает свойством Суслина и счётной базой. Пусть открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X не содержит конечного подпокрытия. Можно считать, что $\mathscr{U}$ состоит из элементов счётной базы и само счётно. Пусть $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $F_n = X \setminus U_n$; все F_n замкнуты. Множество F_1 непусто (иначе $\{U_1\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем в нём какую-нибудь точку x_1. Множество $F_1 \cap F_2$ тоже непусто (иначе $\{U_1, U_2\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем точку $x_2 \in F_1 \cap F_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек X с тем свойством, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n содержит все x_k с номерами $k \geqslant n$. Поскольку X удовлетворяет условию ❸, оно удовлетворяет и условию ❹. Пусть x — предел подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Возьмём любое $n \in \mathbb{N}$ и найдём $m \in \mathbb{N}$, для которого $k_m \geqslant n$. По построению все члены последовательности $(x_{k_{m+i}})_{i\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству F_n. Кроме того, $x_{k_{m+i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} x$. Значит, $x \in F_n$. Таким образом, $x \in \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$; следовательно, $x \notin \bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, т.е. $\mathscr{U}$ — не покрытие. $\square$

Скажем, что метрическое пространство (X, d) компактно, если топологическое пространство $(X, \mathscr{T}_d)$, где $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой d, компактно. Компактность метрических пространств можно охарактеризовать в терминах сугубо метрических — ε-сетей, последовательностей Коши и полноты.

Предложение

Метрическое пространство (X, d) вполне ограничено тогда и только тогда, когда всякая последовательность в X содержит подпоследовательность Коши.

Теорема

Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.