Компактификации

Важнейшее следствие теорем Тихонова состоит в том, что всякое тихоновское пространство можно компактифицировать, т.е. вложить в некоторый компакт в качестве всюду плотного подпространства.

Определение

Пара (K, c), где K — компакт, а $c\colon X \to K$ — гомеоморфное вложение топологического пространства X в K такое, что $\overline{c(X)} = K$, называется компактификацией пространства X, или компактным хаусдорфовым расширением пространства X. Разность $K \setminus c(X)$ называется наростом расширения.

Теорема

Топологическое пространство X обладает компактификацией тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.

Теорема

Каждое вполне регулярное пространство X имеет компактификацию (K, c) со свойством $w(K) = w(X)$.

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы будем понимать не только пару (K, c), но и сам компакт K, содержащий (гомеоморфную копию) X в качестве плотного подпространства. Для компактификаций данного пространства X принято использовать обозначения, состоящие из двух символов: cX, bX, βX и т.п.; при этом второй символ — это обозначение самогó пространства, а первый — обозначение его гомеоморфного вложения в соответствующую компактификацию. Так что запись cX не только обозначает некоторый компакт, но и подразумевает, что этот компакт содержит гомеоморфную копию пространства X, причём гомеоморфное вложение X в cX осуществляется отображением $c\colon X \to cX$ и $\overline{c(X)} = cX$.

Определение

Компактификации c_1X и c_2X считаются **эквивалентными**, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon c_1X \to c_2X$ такой, что $c_2 = \varphi \circ c_1$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook, "c_1"'] \arrow[dr, hook, "c_2"] & \\ c_1X \arrow[rr, "\varphi"] & & c_2X \end{tikzcd}$$

коммутативна (двигаясь по стрелкам c_1 и φ, мы получим тот же результат, что и двигаясь по стрелке c_2).

Таким образом, две компактификации пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и гомеоморфизм между ними устроен так, что X вложено в них одинаковым относительно этого гомеоморфизма образом.

Пример

Пусть $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 = (0,1)$ и $X_2 = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим компактификации $c_1 X$ и $c_2 X$ пространства X, представляющие собой сумму $S^1 \oplus [0,1]$ окружности и отрезка, в которую X вложено по-разному: $c_1|_{X_1}$ — это вложение $i\colon X_1 \to S^1$ интервала в окружность, определённое формулой $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ (считаем, что $X_1 = (0,1) \subset \mathbb{R}$ и S_1 — единичная окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$), и $c_1|_{X_2}$ — тождественное вложение X_2 в отрезок $[0,1]$, тогда как отображение c_2 тождественно вкладывает X_1 в $[0,1]$, а X_2 оно вкладывает в окружность отображением $i|_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$. Компактификации $c_1 X$ и $c_2 X$ гомеоморфны, но не эквивалентны, поскольку при любом гомеоморфизме суммы $S^1 \oplus [0,1]$ в себя окружность должна переходить в окружность, а отрезок — в отрезок. Это вытекает из того, что окружность и отрезок связны и не гомеоморфны.

Легко проверить, что эквивалентность компактификаций действительно является отношением эквивалентности на любом множестве компактификаций данного пространства X, но для этого надо выделить достаточно представительный набор компактификаций, который является множеством (а не целым классом множеств).

Поскольку X гомеоморфно (а значит, равномощно) плотному подпространству $c(X)$ любой своей компактификации cX, имеем $d(cX) \leqslant |X|$, а значит, $w(cX) \leqslant 2^{|cX|} \leqslant 2^{|X|}$! Таким образом, любая компактификация пространства X вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^{2^{|X|}}$, так что достаточно рассматривать только компактификации, являющиеся подпространствами этого куба, а такие компактификации действительно образуют множество, и их эквивалентность в смысле данного выше определения действительно является отношением эквивалентности. Мы будем обозначать множество всех компактификаций $cX \subset [0,1]^{2^{|X|}}$пространства X через $\mathscr{C}(X)$, а множество классов эквивалентности таких компактификаций — через $\mathfrak{C}(X)$.

Теперь упорядочим множество $\mathfrak{C}(X)$. Точнее, мы введём транзитивное отношение $\leqslant$ на множестве компактификаций $\mathscr{C}(X)$ и докажем, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$ тогда и только тогда, когда компактификации c_1X и c_2X эквивалентны, а это означает, что формула $[c_1X] \preccurlyeq [c_2X] \iff c_1X \leqslant c_2X$ корректно определяет отношение $\preccurlyeq$ на $\mathfrak{C}(X)$ и это отношение рефлексивно и антисимметрично, т.е. является порядком.

Определение

Пусть c_1X и c_2X — две компактификации одного и того же пространства X. Положим $c_1X \leqslant c_2X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$ такое, что $f \circ c_2 = c_1$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook, "c_2"'] \arrow[dr, hook, "c_1"] & \\ c_2X \arrow[rr, "f"] & & c_1X \end{tikzcd}.$$

В случае, когда вложения c_1 и c_2 тождественны, неравенство $c_1X \leqslant c_2X$ означает, что существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$, которое переводит каждую точку x в себя. Отображение f сюръективно: образ $f(c_2X)$ компактен и потому замкнут в c_1X, и $c_1(X) = f(c_2(X))$ и $\overline{c_1(X)} = c_1X$.

Теорема

Компактификации c_1X и c_2X эквивалентны тогда и только тогда, когда $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$.

Доказательство. Если компактификации c_1X и c_2X эквивалентны и φ — гомеоморфизм из определения эквивалентности, то в качестве непрерывных отображений $c_2X \to c_1X$ и $c_1X \to c_2X$, гарантирующих выполнение неравенств $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, можно взять φ и φ^{-1}.

Предположим теперь, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, и пусть $f_1\colon c_2X \to c_1X$ и $f_2\colon c_1X \to c_2X$ — непрерывные отображения, для которых $f_1 \circ c_2 = c_1$ и $f_2 \circ c_1 = c_2$. Если мы покажем, что f_1 — биекция, то отображение f_1 будет гомеоморфизмом, причём как раз таким, какой требуется.

Имеем $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всех $y \in c_2X$: для композиции $f_2 \circ f_1\colon c_2X \to c_2X$ выполнено равенство $f_2 \circ f_1 \circ c_2 = f_2 \circ c_1 = c_2$; поскольку c_2 инъективно, это означает, что $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всякого $y \in c_2(X) \subset c_2X$, т.е. сужение $f_2 \circ f_1$ на плотное подпространство $c_2(X)$ пространства c_2X совпадает с сужением тождественного отображения $C_2X \to C_2X$, так что само $f_2 \circ f_1$ и есть тождественное отображение. $\implies$ f_1 (так же как и f_2) биективно. $\square$

Поскольку $c(X)$ — это просто гомеоморфная копия пространства X в cX, можно отождествить X с $c(X)$ и считать, что само пространство X содержится в cX, т.е. c — тождественное вложение. Тогда $X = c(X)$ и нарост имеет вид $cX \setminus X$.

Предложение

Если c_1X и c_2X — компактификации пространства X и $f\colon c_1X \to c_2X$ — непрерывное отображение со свойством $f \circ c_1 = c_2$, то сужение $f|_{c_1(X)}$ — гомеоморфизм, а само отображение f сюръективно и переводит нарост в нарост, т.е.

$$f(c_1X) = c_2X, \qquad f(c_1(X)) = c_2(X), \qquad f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X).$$

Доказательство. То, что $f|_{c_1(X)}$ — гомеоморфизм, ясно, а то, что f сюръективно, следует из того, что при непрерывных отображениях образ компакта замкнут. Последнее утверждение (что нарост переходит в нарост) немедленно вытекает из следующего более общего факта.

Лемма

Пусть $Y \subset X$, X хаусдорфово, $\overline{Y} = X$ и $f : X \to Z$ — непрерывное отображение. Если $f|_Y : Y \to f(Y)$ — гомеоморфизм, то $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x \in X \setminus Y$ и $f(x) \in f(Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $X = Y \cup \{x\}$ и $Z = f(X)$; тогда имеем также $Z = f(Y)$. Возьмём $y \in Y$, для которого $f(y) = f(x)$. Пусть U и V — непересекающиеся окрестности точек x и y. Множество $f(Y \setminus V) = f|_Y(Y \setminus V)$ замкнуто в $f(Y) = Z$, потому что $f|_Y : Y \to f(Y)$ — гомеоморфизм. Значит, $f^{-1}(f(Y \setminus V)) = Y \setminus V$ замкнуто в X. Имеем $x \notin \overline{V}$, так как x имеет окрестность U, не пересекающуюся с V. Поскольку $\overline{Y} = \overline{Y \setminus V \cup V} = \overline{Y \setminus V} \cup \overline{V} = Y \setminus V \cup \overline{V}$ и $x \in X = \overline{Y}$, получаем $x \in Y$. Это противоречие доказывает лемму. $\square$

$\square$

Александровская компактификация

Определение

Топологическое пространство X называется локально компактным, если каждая точка $x \in X$ имеет компактную (не обязательно открытую!) окрестность.

Теорема об александровской компактификации

Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX, для которой $\alpha(X) = X$ и нарост $\alpha X \setminus X$ состоит из одной точки. Эта компактификация является наименьшим элементом множества компактификаций $\mathscr{C}(X)$, а её вес равен весу X.

Доказательство. Возьмём любую точку $* \notin X$ и положим $\alpha = \mathrm{id}_X$ и $\alpha X = X \cup \{*\}$. Объявим открытыми в αX все множества, открытые в X, а также все множества вида $\{*\} \cup (X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X. Легко видеть, что $\alpha X \in T_2$ и αX — компактификация пространства X. Значит, $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, и мы можем рассмотреть множество компактификаций $\mathscr{C}(X)$.

Пусть $cX \in \mathscr{C}(X)$. Соотношение $\alpha X \leqslant cX$ будет доказано, если мы покажем, что отображение $f\colon cX \to \alpha X$, определённое правилом

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(c^{-1}(x)) = c^{-1}(x) & \text{при } x \in c(X), \\ * & \text{при } x \in cX \setminus c(X) \end{cases}$$

(если считать, что $X = c(X)$, то это отображение переводит нарост $cX \setminus X$ в нарост-точку $\{*\}$, а остальные точки оставляет на месте), непрерывно и удовлетворяет условию $f \circ c = \alpha$. Равенство $f \circ c = \alpha$ следует прямо из определения, а чтобы доказать непрерывность, достаточно проверить, что $c(X)$ открыто в cX. Действительно, прообраз любого открытого множества является либо открытым подмножеством множества $c(X)$ (так что если $c(X)$ открыто, то он будет открыт и во всём пространстве cX), либо множеством вида $f^{-1}(\alpha X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X (а такое множество является дополнением в cX до множества $c(K)$, которое компактно, так как c — гомеоморфизм, и потому замкнуто). То, что локально компактное пространство $c(X)$ открыто в cX, вытекает из следующей леммы.

Лемма

Любое локально компактное хаусдорфово пространство Y открыто в любом хаусдорфовом пространстве Z, содержащем Y в качестве плотного подпространства.

Доказательство. Каждая точка $y \in Y$ обладает компактной окрестностью N. Эта окрестность замкнута, поскольку Y хаусдорфово, и содержит некоторую открытую окрестность U точки y. Поскольку $\overline{U} \subset N$, замыкание $\overline{U}^Y$ компактно. Имеем $\overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y$; поскольку это множество компактно, оно замкнуто и в Z. Имеем $\overline{U}^Z = \overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y \subset Y$. Пусть W — открытое множество в Z, для которого $U = Y \cap W$. Тогда $y \in W \subset \overline{W}^Z = \overline{Y \cap W}^Z = \overline{U}^Z \subset Y$, а значит, каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, содержащуюся в Y, т.е. Y открыто. $\square$

Покажем теперь, что $w(\alpha X) = w(X)$. X не компактно $\implies$ $w(X) \geqslant \aleph_0$. Пусть U — любая окрестность любой точки $x \in X$, и пусть N — компактная окрестность этой точки. Пересечение $U \cap N$ содержит с замыканием открытую окрестность точки x, и замыкание этой окрестности компактно. $\implies$ у пространства X имеется база, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. Выберем из неё базу $\mathscr{B}$ мощности $w(X)$. Рассмотрим на $X \cup \{*\}$ новую топологию с предбазой $\mathscr{B} \cup \big\{\{*\} \cup X \setminus \overline{U} : U \in \mathscr{B}\big\}$. Предбаза $\mathscr{B}$ имеет мощность $w(X)$ и потому определяет топологию веса $w(X)$, причём эта топология хаусдорфова и слабее топологии пространства αX; αX компактно $\implies$ она совпадает с топологией αX. $\square$

Определение

Компактификация αX локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства X называется александровской компактификацией, или одноточечной компактификацией, или минимальной компактификацией этого пространства.

Теорема

Если в семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного пространства X есть наименьший элемент cX (относительно порядка $\leqslant$), то X локально компактно и cX эквивалентна александровской компактификации αX.

Доказательство. Сначала покажем, что нарост $cX \setminus c(X)$ одноточечный. Предположим, что нарост $x, y \in cX \setminus c(X)$, $x \neq y$. $Y = cX \setminus \{x, y\}$ локально компактно, и αY — компактификация X. $\implies$ $\alpha Y = c'X$, где $c' \colon X \to c'X$ — гомеоморфное вложение и $c'(x) = c(x)$ для всех $x \in X$. По условию $cX \leqslant c'X$; $\implies$ $\exists$ непрерывное отображение $f \colon c'X \to cX$ такое, что $f|_{c'(X)} = \mathrm{id}_{c'(X)}$. $c'(X)$ плотно $\implies$ $f|_Y = \mathrm{id}_Y$, так что компакты $c'X$ и cX являются компактификациями Y (вложения $Y \to c'X$ и $Y \to cX$ тождественны). Имеем $f(c'X \setminus Y) = cX \setminus Y$ (по недавно доказанному предложению). $c'X = \alpha Y = Y \cup \{*\}$ и $Y = cX \setminus \{x, y\}$ $\implies$ $f(\{*\}) = \{x, y\}$. Такого быть не может.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ для некоторой точки $\star \notin c(X)$. Покажем, что $c(X)$ локально компактно. cX регулярно $\implies$ $cX \in T_1$ $\implies$ $c(X) = cX \setminus \{\star\}$ — открытая окрестность в cX любой точки $x \in c(X)$, и любая точка $x \in c(X)$ имеет окрестность V, замыкание которой в cX содержится в $c(X)$.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ и пространство $c(X)$ (а значит, и X) локально компактно. $\implies$ для X определена одноточечная компактификация $\alpha X = X \cup \{*\}$. По условию теоремы $cX \leqslant \alpha X$, т.е. $\exists$ непрерывное отображение $\varphi \colon \alpha X \to cX$ такое, что $\varphi \circ \mathrm{id}_X = c$. Имеем $\varphi(\{*\}) = \{\star\}$ $\implies$ φ биективно $\implies$ гомеоморфизм. $\implies$ компактификации cX и αX эквивалентны. $\square$

Стоун–чеховская компактификация

Определение

Компактификация тихоновского пространства X, наибольшая относительно $\leqslant$, называется компактификацией Стоуна–Чеха, или стоун-чеховской компактификацией, или стоун-чеховским расширением, или максимальной компактификацией пространства X и обозначается βX.

Теорема

Для каждого тихоновского пространства X существует стоун-чеховская компактификация βX.

Доказательство. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX$ и диагональное отображение

$$\beta = \mathop{\Delta}_{cX\in\mathscr{C}(X)} c\colon X \to \prod_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX,$$

которое по теореме о диагональном произведении отображений является гомеоморфным вложением. Обозначим замыкание $\overline{\beta(X)}$ его образа в $\prod\limits_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX$ через βX. По теореме Тихонова о компактности произведений и в силу компактности замкнутых подмножеств компактов пространство βX является компактификацией пространства X, причём эта компактификация наибольшая: для любой компактификации $c_0X \in \mathscr{C}(X)$ сужение $\widetilde{\pi}_{c_0X}$ канонической проекции $\pi_{c_0X}\colon \prod\limits_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX \to c_0X$ на $\beta(X)$ удовлетворяет условию $\widetilde{\pi}_{c_0X} \circ \beta = c_0$, поэтому $c_0X \leqslant \beta X$ при всех $c_0X \in \mathscr{C}(X)$, так что βX — действительно стоун-чеховская компактификация. $\square$

Начиная с этого момента мы будем отождествлять пространство X с подпространством $c(X)$ любой его компактификации (когда это удобно) без специальных оговорок. В частности, мы будем считать, что $X \subset \beta X$. Такое отождествление позволяет обсуждать продолжение непрерывных отображений пространства X на его компактификации cX без необходимости всякий раз включать в цепочку отображений гомеоморфизм $X \rightleftarrows c(X)$.

Теорема

Пусть X — тихоновское пространство.

1. *Каждое непрерывное отображение $f: X \to K$ пространства X в любой компакт K можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{f}: \beta X \to K$.*
2. *Если cX — компактификация X и любое непрерывное отображение $f: X \to K$ в любой компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: cX \to K$, то cX эквивалентна βX.*

Доказательство. 1 Положим $c = \beta \Delta f: X \to \beta X \times K$. По теореме о диагональном отображении c — гомеоморфное вложение, так что $cX = \overline{c(X)} \subset \beta X \times K$ — компактификация пространства X. βX максимальна $\Longrightarrow$ $\exists$ непрерывное $g: \beta X \to cX$ такое, что $g \circ \beta = g|_X = c$. Пусть $\pi: cX \to K$ — сужение проекции $\pi_K: \beta X \times K \to K$ на cX. Положим $\hat{f} = \pi \circ g: \beta X \to K$. Тогда $\hat{f}$ — продолжение f, так как $\hat{f}|_X = \hat{f} \circ \beta = \pi \circ g \circ \beta = \pi \circ c = f$.

2 Продолжим тождественное вложение $\beta: X \to \beta X$ до непрерывного отображения $\hat{\beta}: cX \to \beta X$. Имеем $\hat{\beta} \circ c = \beta$, т.е. $\beta X \leqslant cX$, и $cX \leqslant \beta X$, т.к. βX максимальна; значит, cX и βX эквивалентны. □