Напомним определение компакта:

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются *компактами.*

Определение$'$. Топологическое пространство *компактно*, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Эти определения равносильны: если $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus U : U \in \mathscr{U}\}$ состоит из замкнутых множеств (поскольку все $U \in \mathscr{U}$ открыты), центрировано (если бы существовало конечное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ с пустым пересечением, то согласно важному замечанию множества $\{X \setminus F : F \in \mathscr{F}'\}$ образовывали бы конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$) и имеет пустое пересечение (потому что $\mathscr{U}$ — покрытие). Точно так же если $\mathscr{F}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств X и $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$, то $\mathscr{U} = \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}\}$ — открытое покрытие[1] X, и в силу центрированности семейства $\mathscr{F}$ из него нельзя выделить конечное подпокрытие.

Теорема 1. *Любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления.*

Доказательство. Пусть A — подмножество компактного пространства, не имеющее точек накопления. Тогда у любой точки $x \in \overline{A}$ найдётся открытая окрестность U_x в X, пересечение которой с A конечно. Замкнутое подпространство $\overline{A}$ компактного пространства X компактно, и семейство $\{U_x \cap \overline{A} : x \in \overline{A}\}$ является его открытым покрытием. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1} \cap \overline{A}, \dots, U_{x_k} \cap \overline{A}\}$. Из того, что $U_{x_1} \cap \overline{A} \cup \dots \cup U_{x_k} \cap \overline{A} = \overline{A}$ и все множества $U_{x_i} \cap \overline{A}$ конечны, вытекает, что множество $\overline{A}$ (а значит, и A) конечно. ∎

Теорема 2. *Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.*

Доказательство. Если $f \colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то $\{f^{-1}\big((-n, n)\big) : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие пространства X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. ∎

Счётно компактные и псевдокомпактные пространства

Определение 1. Топологическое пространство X называется *счётно компактным*, если каждое счётное открытое покрытие этого пространства содержит конечное подпокрытие.

(Иногда за определение берут равносильное требование существования точки накопления у всякого бесконечного подмножества.)

Определение 2. Топологическое пространство X называется *псевдокомпактным*, если оно вполне регулярно и всякая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ ограничена.

Предложение 1. *Всякое счётно компактное тихоновское пространство псевдокомпактно.*

[1] По определению покрытие должно быть индексированным семейством. Однако на индексное множество никаких ограничений не накладывается, и в данном случае можно считать, что это множество $\mathscr{F}$, т.е. что семейство $\mathscr{U}$ индексировано элементами F этого множества. Вообще, любое семейство можно трактовать как индексированное своими собственными элементами, так что любое семейство множеств, объединение которых содержит данное множество, можно рассматривать как покрытие этого множества.

Это доказывается так же, как ограниченность непрерывных функций на компакте.

Из определения счётной компактности сразу же вытекает, что любое замкнутое подпространство счётно компактного пространства счётно компактно. Псевдокомпактность замкнутыми подпространствами не наследуется; мы продемонстрируем это немного дальше.

Предложение 2. *Топологическое пространство X счётно компактно тогда и только тогда, когда любое бесконечное множество в X имеет точку накопления.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — бесконечное множество без точек накопления, и пусть $B \subset A$ — его любое счётное подмножество. Тогда B тоже не имеет точек накопления, а значит, во-первых, B замкнуто, и во-вторых, у каждой точки $b \in B$ имеется открытая окрестность U_b, для которой $B \cap U_b = \{b\}$. Семейство $\{X \setminus B\} \cup \{U_b : b \in B\}$ представляет собой счётное открытое покрытие пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия.

Пусть теперь $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие пространства X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Сейчас мы по индукции построим бесконечное множество $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ без точки накопления. Возьмём любую точку $x_1 \in X$ и выберем натуральное число k_1, для которого $x_1 \in U_{k_1}$. Предположим, что уже выбраны попарно различные точки $x_1, \dots, x_n \in X$ и натуральные числа $k_1 < \dots < k_n$ так, что $x_i \in U_{k_i}$ для всех $i \leqslant n$ и $x_i \notin U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{k_{i-1}}$, если $2 \leqslant i \leqslant n$. Возьмём любую точку $x_{n+1} \in X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{k_n})$ (она существует, так как $\mathscr{U}$ не содержит конечных подпокрытий) и выберем $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, для которого $x_{n+1} \in U_{k_{n+1}}$. Ясно, что $k_{n+1} > k_n$ и $x_{n+1} \neq x_i$ для $i \leqslant n$. Индуктивное построение завершено. Каждая точка $x \in X$ содержится в некотором элементе U_n покрытия $\mathscr{U}$, и $U_n \cap A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$, поскольку $k_n \geqslant n$ и $x_i \notin U_j$ для $j \leqslant k_{i-1}$. Значит, U_n — окрестность точки x, пересекающая A лишь по конечному числу элементов. ■

Примеры

1. Важнейший пример компакта — пространство $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией. Докажем, что W_1 компактно.

Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства W_1 (отметим, что здесь мы обозначаем индексы буквой ι, а не α, а букву α резервируем для ординалов). Рассмотрим множество A всех $\alpha \leqslant \omega_1$, для которых замкнутый интервал $[0, \alpha]$ содержится в объединении конечного числа элементов покрытия $\mathscr{U}$. Нам надо показать, что множество $W_1 \setminus A$ пусто. Предположим, что $W_1 \setminus A$ непусто, и обозначим через α_0 наименьший элемент этого множества. Существует $\iota_0 \in I$, для которого $\alpha_0 \in U_{\iota_0}$. Ясно, что $0 < \alpha_0$ (так как $0 \in A$). Значит, найдётся $\beta < \alpha_0$, для которого $(\beta, \alpha_0] \subset U_{\iota_0}$. По определению ординала α_0 имеем $\beta \in A$, а из определения множества A следует, что $[0, \beta] \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ для некоторых $\iota_1, \dots, \iota_k \in I$. Поэтому $[0, \alpha_0] \subset U_{\iota_0} \cup U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$, что противоречит определению ординала α_0. Таким образом, $W_1 \setminus A = \varnothing$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь подпространство $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ пространства W_1. Оно не может быть компактным, поскольку вкладывается в качестве незамкнутого подмножества в хаусдорфово пространство W_1 (ω_1 является его предельной точкой). Тем не менее всякое бесконечное множество $A \subset W_1^0$ имеет предельную точку в W_1^0, т.е. W_1^0 *счётно компактно*. Действительно, пусть $A \subset W_1^0$ бесконечно. Выберем строго возрастающую последовательность ординалов из A: обозначим через α_0 наименьший ординал из бесконечного множества A, через α_1 — наименьший ординал из бесконечного множества $A \setminus \{\alpha_0\}$, через α_2 — наименьший ординал из бесконечного множества $A \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$ и т.д. Положим $\alpha = \sup_n \alpha_n = \bigcup_n \alpha_n$. Рассмотрим любую окрестность U точки α. Она содержит некоторый интервал (β, γ), где $\beta < \alpha$ и $\gamma > \alpha$. Поскольку $\beta < \alpha$ (т.е.

$\beta \in \alpha$), а $\alpha = \bigcup_n \alpha_n$, найдётся n, для которого $\beta \in \alpha_n$, т.е. $\beta < \alpha_n$. Имеем $\alpha_n \in U$. Отсюда вытекает, что α — предельная точка множества $\{\alpha_n : n \geqslant 0\} \subset A$, а значит, и множества A.

Это означает, что условие, сформулированное в теореме 1, лишь необходимо, но не достаточно для компактности.

Кроме того, всякая непрерывная функция на W_1^0 ограничена, т.е. W_1^0 *псевдокомпактно*. Это немедленно вытекает из предложения 1.

Пространства W_1 и W_1^0 обладают и другими замечательными свойствами.

2. *Пространство Исбелла–Мрувки.* Говорят, что семейство множеств *почти дизъюнктно*, если пересечение любых двух множеств из этого семейства конечно. Стандартный пример несчётного почти дизъюнктного семейства бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ строится так. Занумеруем все рациональные числа натуральными: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. К каждому вещественному числу x сходится некоторая последовательность рациональных чисел. Номера рациональных чисел из этой последовательности в выбранной нумерации образуют бесконечное множество A_x натуральных чисел. Ясно, что семейство $\mathscr{A} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ почти дизъюнктно.

Пусть $\mathscr{A}$ — максимальное (по включению) почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$; существование такого семейства вытекает из леммы Цорна. Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех почти дизъюнктных семейств бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Упорядочим его по включению. Чтобы применить лемму Цорна, надо показать, что для любого линейно упорядоченного по включению множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ семейство $\bigcup \mathfrak{C}$ состоит из бесконечных множеств и почти дизъюнктно, т.е. $\bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{A}$. Пусть $A, B \in \bigcup \mathfrak{C}$. Тогда существуют $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2 \in \mathfrak{C}$, для которых $A \in \mathscr{C}_1$ и $B \in \mathscr{C}_2$. Поскольку $\mathfrak{C}$ линейно упорядочено по включению, имеем либо $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, либо $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_1$. Пусть для определённости $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$. Тогда $A, B \in \mathscr{C}_2$, а значит, они удовлетворяют нужным условиям, потому что $\mathscr{C}_2$ — почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Легко видеть, что семейство $\mathscr{A}$ не может быть конечным или счётным — если $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$, то, выбрав по точке a_i в каждом множестве $A_{i+1} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_i)$, мы получим бесконечное множество $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$, пересечение которого с каждым A_n конечно, а это противоречит максимальности семейства $\mathscr{A}$. Ясно также, что $\mathbb{N} \setminus \bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}$ конечно, так что без ограничения общности можно считать, что $\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \mathbb{N}$ (это допущение ни на что не влияет, но позволяет сократить формулы).

Рассмотрим одноточечные компактификации $A \cup \{p_A\}$ множеств $A \in \mathscr{A}$ (это обычные последовательности точек множества A, сходящиеся к p_A) и положим $\Psi(\mathscr{A}) = \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \mathbb{N}$. Снабдим $\Psi(\mathscr{A})$ топологией, в которой все точки множества $\mathbb{N}$ изолированы, а базу окрестностей каждой точки p_A образуют множества вида $A \setminus F$, где F конечно. Таким образом, занумеровав произвольным образом элементы множества A, мы получим последовательность, сходящуюся к p_A в $\Psi(\mathscr{A})$, а множество $P = \{p_A : A \in \mathscr{A}\}$ замкнуто и дискретно в $\Psi(\mathscr{A})$.

Пространство $\Psi(\mathscr{A})$ *псевдокомпактно*. Действительно, предположим, что $f\colon \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция. Тогда и сужение $f|_{\mathbb{N}}$ неограничено (так как $\mathbb{N}$ плотно в $\Psi(\mathscr{A})$), однако все сужения $f|_A$ ограничены (так как каждое множество A содержится в компакте $A \cup \{p_A\}$, на котором функция f ограничена, будучи непрерывной). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдём такое $k_n \in \mathbb{N}$, что $f(k_n) > n$. Пересечение множества $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ с каждым $A \in \mathscr{A}$ конечно, что противоречит максимальности почти дизъюнктного семейства $\mathscr{A}$.

Из того, что пространство $\Psi(\mathscr{A})$ содержит несчётное замкнутое дискретное множество P, следует, что оно *не счётно компактно*. Этот пример показывает, что псевдокомпактность не наследуется замкнутыми подпространствами.