Экстремально несвязные пространства

Определение

Топологическое пространство X экстремально несвязно, если замыкание любого открытого множества в нём открыто.

Равносильные условия

- внутренность любого замкнутого множества в X замкнута
- если $U, V \subset X$ открыты и $U \cap V = \varnothing$, то $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$
- любое всюду плотное множество $Y \subset X$ C^*-вложено в X, т.е. всякая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$
- любое открытое множество $U \subset X$ C^*-вложено в X
- стоун-чеховская (максимальная) компактификация βX — проективный объект категории $\mathtt{Comp}$
- булева алгебра $\mathrm{CO}(X)$ открыто-замкнутых подмножеств X с операциями $\vee = \cup$, $\wedge = \cap$, $\neg = X \setminus \bullet$ и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$ образует базу топологии X и полна.

Пусть X топологическое пространство и $x \in X$. Напомним, что множество U называется окрестностью точки x, если U содержит некоторую открытую окрестность этой точки, т.е. некоторое открытое множество $V \ni x$. Проколотая окрестность точки x — это множество вида $U \setminus \{x\}$, где U — любая окрестность точки x.

Замечание

Множество всех проколотых окрестностей неизолированной точки x топологического пространства X является фильтром на множестве $X \setminus \{x\}$.

Более того, если Y — любое множество, $x \in Y$, $X = Y \setminus \{x\} \neq \varnothing$ и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на множестве X, то на Y существует топология, относительно которой $\mathscr{F}$ является фильтром проколотых окрестностей точки x: достаточно объявить все точки множества X изолированными и определить окрестности точки x как множества вида $F \cup \{x\}$, где $F \in \mathscr{F}$. Соответствующая топология имеет вид $\mathscr{P}(X) \cup \{F \cup \{x\} : F \in \mathscr{F}\}$.

Замечание

Пространство $X \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$ экстремально несвязно $\iff$ фильтр $\mathscr{F}$ проколотых окрестностей точки $*$ является ультрафильтром на X.

Доказательство. $\Leftarrow$ вытекает из второго условия, равносильного экстремальной несвязности, и основного свойства ультрафильтров. Докажем $\Rightarrow$. Пусть A — любое подмножество X. Надо показать, что либо A, либо $X \setminus A$ является проколотой окрестностью точки $*$. Множества A и $X \setminus A$ открыты в $X \cup \{*\}$. Значит, $*$ принадлежит замыканию ровно одного из этих множеств. Пусть для определённости $* \in \overline{A}$. Имеем $\overline{A} = A \cup \{*\}$ (и $\overline{X \setminus A} = X \setminus A$) — иначе $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \neq \varnothing$. Значит, множество $A \cup \{*\}$ открыто и A — проколотая окрестность точки $*$. □

Экстремальная несвязность наследуется открытыми, всюду плотными и счётными подпространствами и сохраняется открытыми непрерывными отображениями.